

Министерство сельского хозяйства российской федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
Высшего профессионального образования (ФГБОУ ВПО)
КУБАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ АГРАРНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Факультет прикладной информатики
Кафедра компьютерных технологий и систем

Электронный практикум по математической логике и теории алгоритмов

*для студентов факультета
«Прикладная информатика»*

Студента _____
№ группы _____ *№ варианта* _____

Краснодар
2013

УДК 004.9
ББК 32.97
Л88

Анищик Т.А., Аршинов Г.А.
Электронный практикум по математической логике и теории алгоритмов для студентов факультета «Прикладная информатика»
/ Т.А. Анищик, Г.А. Аршинов – Краснодар: КубГАУ, 2013. –с.

Электронный практикум разработан с учетом требований Государственного образовательного стандарта базового высшего профессионального образования и рассмотрен на заседании кафедры компьютерных технологий и систем КГАУ (протокол № от 2013 г.) и рекомендован к печати методической комиссией факультета прикладной информатики КГАУ. Председатель методической комиссии факультета прикладной информатики: профессор Попова Е.В.

Данное пособие, содержащее упражнения и задания по всем основным темам дисциплины «Математическая логика и теория алгоритмов», должно помочь в практическом освоении изучаемой дисциплины и может быть полезно как абитуриентам, так и студентам, продолжающим углубленно изучать разделы курса математической логики и теории алгоритмов, а также слушателям ФПК.

Приведенные упражнения и задания могут быть использованы при проведении практических занятий, как для аудиторного, так и домашнего контроля усвоенных знаний.

- © Т.А. Анищик, Г.А. Аршинов, 2013.
- © Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение Высшего профессионального образования «Кубанский государственный аграрный университет», 2013

Оглавление

| | |
|---|-----------|
| Глава 1. Элементы теории множеств..... | 5 |
| Практическое занятие №1. Операции над множествами..... | 5 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>7</i> |
| Практическое занятие №2. Операции над множествами..... | 9 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>9</i> |
| Практическое занятие №3. Равносильные преобразования множеств.12 | 12 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>13</i> |
| Практическое занятие №4. Отображение и отношение множеств..... | 16 |
| Задания для самостоятельного выполнения..... | 19 |
| Практическое занятие №5. Отображение и отношение множеств..... | 21 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>21</i> |
| Контрольные вопросы..... | 23 |
| Глава 2. Элементы математической логики | 25 |
| Практическое занятие №6. Основы алгебры логики | 25 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>30</i> |
| Практическое занятие №7. Основы алгебры логики | 34 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>34</i> |
| Практическое занятие №8. Логические функции | 37 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>39</i> |
| Практическое занятие №9. Применение алгебры логики | 42 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>48</i> |
| Практическое занятие №10. Применение алгебры логики | 57 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>57</i> |
| Контрольные вопросы..... | 59 |
| Глава 3. Элементы логики предикатов | 61 |
| Практическое занятие №11. Понятие предиката. | 61 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения.....</i> | <i>61</i> |

| | |
|---|------------|
| Практическое занятие №12. Операции над предикатами и кванторами. | 64 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>66</i> |
| Практическое занятие №13. Формулы логики предикатов. | 77 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>79</i> |
| Практическое занятие №13. Применение логики предикатов. | 84 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>86</i> |
| Глава 4. Элементы теории алгоритмов | 96 |
| 4.1. Практическое занятие №14. Способы описания алгоритмов. | 96 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>98</i> |
| 4.2. Практическое занятие №15. Виды алгоритмов. | 99 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>100</i> |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>102</i> |
| Практическое занятие №16. Виды алгоритмов. | 104 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>106</i> |
| Практическое занятие №17. Машина Тьюринга | 109 |
| <i>Задания для самостоятельного выполнения</i> | <i>112</i> |
| Рекомендуемая литература | 117 |

Глава 1. Элементы теории множеств

Практическое занятие №1. Операции над множествами

- Цель занятия:
1. изучить способы задания множеств;
 2. получить навыки в применении операций над множествами.

Множества можно задавать двумя способами:

1. перечислением элементов множества.

Например, множество $M = \{x, y, z\}$ состоит из трёх элементов, порядок перечисления которых не имеет значения, т.е. $\{x, y, z\} = \{y, x, z\} = \dots$

2. описанием элементов множеств:

- *описанием характеристических свойств*, объединяющих элементы в виде уравнений, диаграмм Эйлера-Венна и геометрически. Например, множество $M = \{x^2 \in \mathbb{N}; x - \text{простое число}\}$ задано квадратами простых чисел.

- *описанием множеств, порожденных процедурами над элементами*, означает указание алгоритма порождения элементов этого множества.

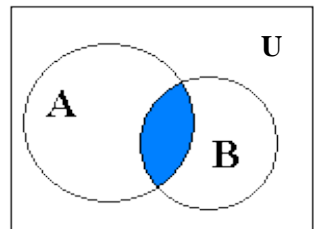
Например, подмножество M всех нечетных натуральных чисел с помощью порождающей процедуры имеет вид: $M = \{x \in \mathbb{N}: x = 1 + 2n, n \in \mathbb{N}\}$

Операции над множествами

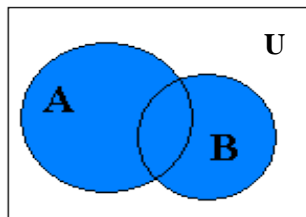
Рассмотрим операции над множествами в порядке убывания приоритета.

Пересечением (произведением) двух множеств называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат множествам A и B одновременно.

Обозначение: $C = A \cap B$

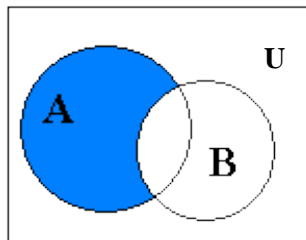


Объединением (суммой) двух множеств A и B называется множество C , состоящее из тех и только тех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из множеств A или B (или тому и другому вместе).
Обозначение: $C = A \cup B$



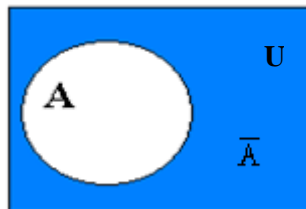
Разностью множеств A и B называется такое множество C , которое состоит из тех и только тех элементов, которые принадлежат множеству A , но не принадлежат множеству B .

Обозначение: $C = A \setminus B$ или $C = A \setminus B$



Дополнением множества A до универсального множества U называется множество C , равное разности $U \setminus A$.

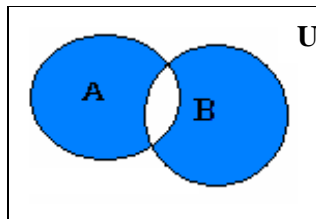
Обозначение: $C = U \setminus A$ или $C = \bar{A}$



Симметрической разностью двух множеств A и B называется множество

$$C = A \cup B \setminus A \cap B.$$

Обозначение: $C = A \Delta B$



Формула включений и исключений

для двух множеств A и B :

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B).$$

для трех множеств A , B и C :

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$$

где $n(Z)$ – количество элементов множества Z , т.е. его *мощность*.

Примеры выполнения заданий

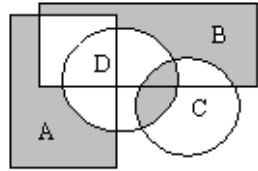
1. Заданы множества: $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$, $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$.

Найдите элементы множеств: $D = A \cup B$ и $E = A \cap B$.

$D = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $E = \{1, 3, 5\}$.

2. Представьте заштрихованные области формулами теории множеств

Решение: $D = (A \Delta B) \mid (D \Delta C)$



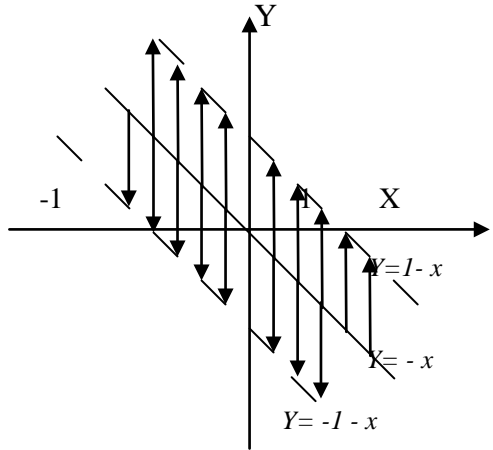
3. Пусть (x, y) - координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множество:

$$A = \{(x, y) \mid |x + y| < 1\}.$$

Решение:

$$|x+y| < 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+y \geq 0 \\ x+y < 1 \\ x+y < 0 \\ -(x+y) < 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \geq -x \\ y < 1-x \\ y < -x \\ y > -1-x \end{cases}$$



Задания для самостоятельного выполнения

1. Задайте множество A перечислением его элементов:

0) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$

2) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 4) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$

4) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$

6) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$

8) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0\}$

1) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + x - 20) = 0\}$

3) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$

5) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$

7) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0\}$

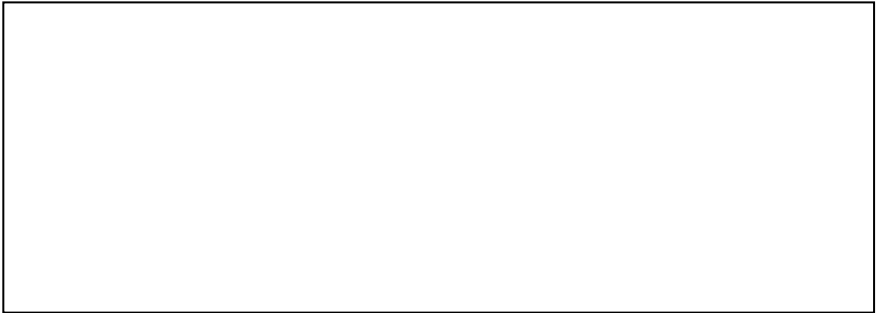
9) $A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - x - 2) \cdot (x^2 - x - 20) = 0\}$

2. Заданы множества: $A = \{1, 3, 9, 10, 8\}$, $B = \{5, 3, 11, 4, 8\}$ и $C = \{1, 4, 8, 9, 10\}$. Найдите элементы множеств D и E :

- | | |
|---|--|
| 0) $D = A \cup B \cap C$; $E = (A \Delta B) \mid C$; | 1) $D = (A \cup C) \mid (B \cap C)$; $E = A \mid B \cap C$; |
| 2) $D = A \cup B \cup C$; $E = A \cap C \Delta B$; | 3) $D = (A \cup C) \cap B$; $E = A \Delta B \cup C$; |
| 4) $D = (A \cup C) \mid B$; $E = (B \Delta C) \mid A$; | 5) $D = A \cap B \cap C$; $E = C \Delta B \mid A$; |
| 6) $D = A \cup (B \Delta C)$; $E = A \mid B \mid C$; | 7) $D = (B \cup C) \mid (A \cap C)$; $E = A \cup B \mid C$; |
| 8) $D = (A \cup B) \cap C$; $E = A \Delta B \mid C$; | 9) $D = (A \cup B) \Delta C$; $E = A \cap B \mid C$; |

3. Пусть (x, y) - координаты точек плоскости. Укажите штриховкой множества $A \cap B$ и $A \cup B$:

- | | |
|--|---|
| 0) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$; $B = \{(x, y) \mid x + 2y < 3\}$ | 1) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$; $B = \{(x, y) \mid 4x - y \leq 2\}$; |
| 2) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 9\}$; $B = \{(x, y) \mid 4y + x > 1\}$; | 3) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 25\}$; $B = \{(x, y) \mid 2x + 2y > 5\}$; |
| 4) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 4\}$; $B = \{(x, y) \mid 3x + y < 6\}$; | 5) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 16\}$; $B = \{(x, y) \mid x + 3 \geq 1\}$; |
| 6) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 36\}$; $B = \{(x, y) \mid x + y \geq 2\}$; | 7) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 9\}$; $B = \{(x, y) \mid 2x - y \leq 1\}$; |
| 8) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 16\}$; $B = \{(x, y) \mid x - 3y > 5\}$; | 9) $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 36\}$; $B = \{(x, y) \mid x + 4y < 8\}$; |



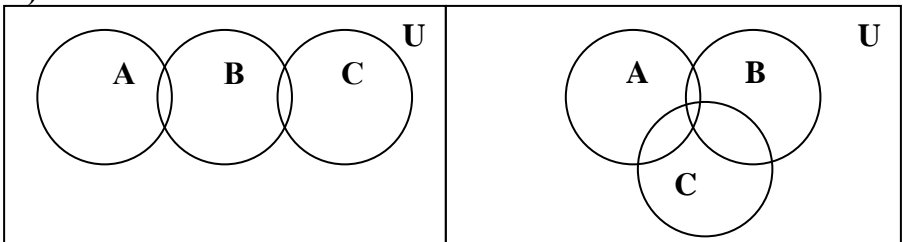
Практическое занятие №2. Операции
над множествами

Задания для самостоятельного выполнения

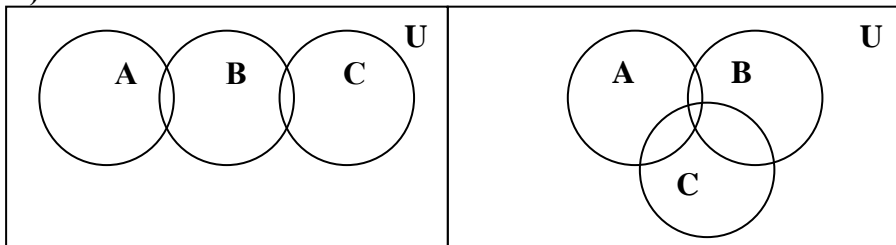
1. Изобразите с помощью диаграмм Эйлера-Венна в двух вариантах расположения следующие множества:

- | | | |
|---|---|---|
| 0) а) $U \mid \overline{A \cup B \cup C}$; | 1) а) $C \cup A \mid \overline{B}$; | 2) а) $(A \Delta B) \mid C$; |
| б) $\overline{A} \cap B \mid C$; | б) $(A \mid B) \cup C$; | б) $\overline{A \cup B} \cap C$; |
| 3) а) $A \cap B \mid C$; | 4) а) $\overline{A \cup B} \mid C$; | 5) а) $\overline{A} \cap \overline{B} \mid C$; |
| б) $A \cap B \cup C \mid A$; | б) $(B \mid A) \cap C$; | б) $\overline{A \cap B} \mid C$; |
| 6) а) $C \mid A \cup B$; | 7) а) $U \mid \overline{A \cap B \cap C}$; | 8) а) $A \mid (B \Delta C)$; |
| б) $\overline{A} \cap (B \Delta C)$; | б) $C \cap A \mid \overline{B}$; | б) $C \mid A \cap B$; |
| 9) а) $(A \cup B) \cap (B \Delta C)$; | | |
| б) $A \cup B \mid C$; | | |

а)



б)



2. Вычислите, используя диаграммы Эйлера-Венна и формулу включений и исключений:

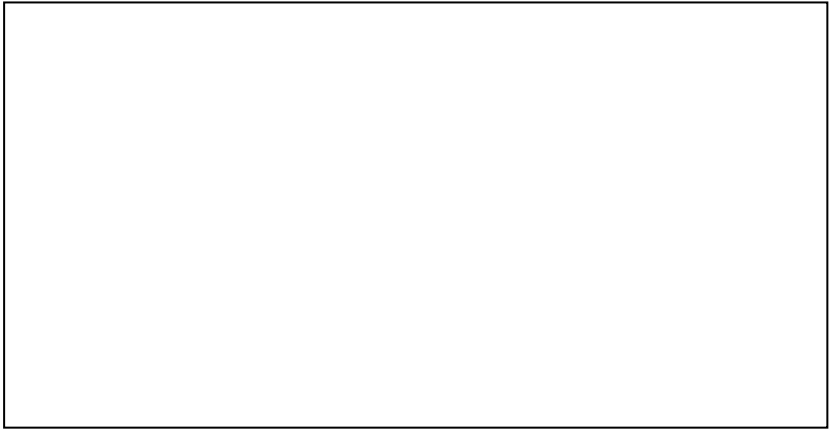
0)1) В группе спортсменов, прибывших на соревнования по плаванию, 16 человек из Австрии, 18 человек из России, 12 женщин из Канады. Четверть спортсменов из Австрии - женщины, половина россиян – мужчины, а три женщины и пять мужчин из Китая. Сколько спортсменов мужчин и женщин в этой группе?

2)3) Среди 100 деталей прошли обработку на 1-м станке 42 штуки, на 2-м - 30 штук, а на 3-м - 28. Причем на 1-ом и 2-ом станках обработано 5 деталей, на 1-ом и 3-ем - 10 деталей, на 2-ом и 3-ем - 8 деталей, на всех трех станках обработано 3 детали. Сколько деталей обработано на первом станке и сколько деталей не обработано ни на одном из станков?

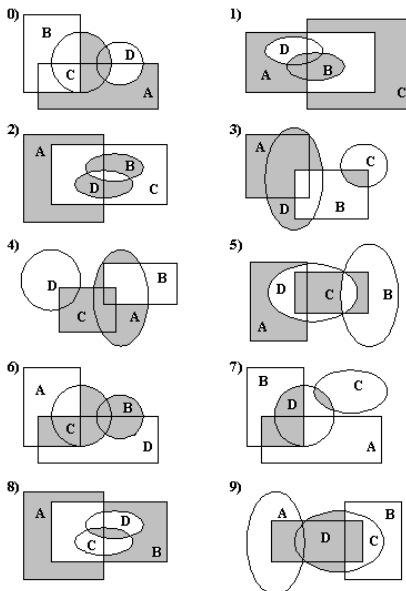
4)5) В группе туристов, посетивших нашу страну, 30 женщин. 33 человека из Европы, 16 человек из Польши, 12 человек из Канады. Четверть группы из Польши – женщины. Треть женщин группы – из Канады. Сколько туристов в этой группе, если каждый попал, хотя бы в одну из упомянутых групп?

6)7) В отчете об обследовании студентов сообщалось, что количество студентов, изучающих немецкий, французский и английский языки, таково: все три языка изучают 5 человек, немецкий и английский - 10, французский и английский - 8, немецкий и французский - 20, английский язык - 30 человек, французский - 50, немецкий - 23. Инспектор, представивший этот отчет, был уволен. Почему?

8)9) Из 25 учеников класса «отлично» по математике в четверти получили 12 человек, «отлично» по физике – 10 человек, 6 учеников получили «отлично» по обоим предметам. Сколько учеников не имеют отличной оценки ни по математике, ни по физике?



1. *Представьте заштрихованные области формулами теории множеств*



Практическое занятие №3. Равносильные преобразования множеств

Законы теории множеств

$$\begin{array}{ll}
 A \cup B \equiv B \cup A; & A \cup \emptyset \equiv A; \\
 A \cap B \equiv B \cap A; & A \cap \emptyset \equiv \emptyset; \\
 A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap C; & A \cap \overline{A} \equiv \emptyset; \\
 A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup C; & A \cup A \equiv A; \\
 A \cap (B \cup C) \equiv (A \cap B) \cup (A \cap C); & A \cap A \equiv A; \\
 A \cup (B \cap C) \equiv (A \cup B) \cap (A \cup C); & \overline{A \cup B} \equiv \overline{A} \cap \overline{B}; \\
 A \cup U \equiv U; & \overline{A \cap B} \equiv \overline{A} \cup \overline{B}; \\
 A \cap U \equiv A; & A \cup (A \cap B) \equiv A; \\
 A \cup \overline{A} \equiv U; & A \cap (A \cup B) \equiv A
 \end{array}$$

Равносильности теории множеств

$$\begin{array}{ll}
 A \mid B \equiv A \cap \overline{B}; & A \mid (B \mid C) \equiv (A \mid B) \cup (A \cap C); \\
 A \mid A \equiv \emptyset; & (A \mid B) \mid C \equiv A \mid B \cup C; \\
 A \mid (B \cup C) \equiv (A \mid B) \cap (A \mid C); & A \Delta B \equiv B \Delta A; \\
 A \mid (B \cap C) \equiv (A \mid B) \cup (A \mid C); & A \Delta B \equiv A \cup B \mid A \cap B; \\
 (A \cap B) \mid C \equiv (A \mid C) \cap (B \mid C); & A \Delta B \equiv (A \mid B) \cup (B \mid A); \\
 (A \cup B) \mid C \equiv (A \mid C) \cup (B \mid C); & A \Delta (B \Delta C) \equiv (A \Delta B) \Delta C; \\
 A \mid (A \mid B) \equiv A \cap B; & A \cap (B \Delta C) \equiv (A \cap B) \Delta (A \cap C).
 \end{array}$$

Примеры выполнения заданий

1. Докажите теоретико-числовое равенство: $\overline{\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup \overline{Z}} \equiv Z$
 $\overline{\overline{Y \cup X} \cap X \cap Y \cup \overline{Z}} \equiv (Y \cup X \cup \overline{X} \cup \overline{Y}) \cap Z \equiv U \cap Z \equiv Z$

2. Упростите выражение: $X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X})$.

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap ((X \cup \overline{X}) \mid (X \cap \overline{X}))$$

$$X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv X \cup (\overline{X} \cap Y) \cap (U \mid \emptyset)$$

$$X \cup (\bar{X} \cap Y) \cap (X \Delta \bar{X}) \equiv X \cup (\bar{X} \cap Y) \cap U \equiv (X \cup \bar{X}) \cap (X \cup Y)$$

$$X \cup (\bar{X} \cap Y) \cap (X \Delta \bar{X}) \equiv U \cap (X \cup Y) \equiv X \cup Y$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Докажите тождества:

0) $X \cup \overline{X \cap Y \cup Z} = Z \cup X$

$$\overline{Z \cup X \cap Y \cup \bar{X}} = \bar{X} \cap \bar{Z}$$

$$X \cap \bar{Y} \cup Z \mid \bar{Y} = Z \mid \bar{Y}$$

$$Y \mid (\bar{X} \cap \bar{Y} \cup Z) = \emptyset;$$

2) $\bar{X} \cap Y \cap Z \cup X \cap Z = (X \cup Y) \cap Z$

$$X \cup \overline{Y \cap \bar{Z} \cup \bar{X}} \cup Y \cup \bar{Z} = X \cup Z \cup \bar{Y}$$

$$Y \mid (Y \mid X \cup \bar{Y}) = Y \cap X$$

$$(\bar{Z} \cap \bar{X} \mid X) \mid \bar{Z} = \emptyset;$$

4) $\bar{X} \cup Y \cap Z \cup \bar{Y} \cup \bar{X} \cup \bar{Z} = U$

$$\bar{X} \cap \overline{Y \cup X \cap \bar{Z}} = \bar{Y} \cap \bar{X}$$

$$\overline{Y \cap \bar{Z}} \mid \bar{Z} = Z \mid Y$$

$$X \mid (X \mid Y \cup \bar{X}) = \emptyset;$$

6) $\bar{X} \cup \bar{Z} \cup \bar{X} \cap \bar{Y} = U$

$$\overline{\bar{X} \cup \bar{Y} \cup \bar{Z} \cup \bar{X} \cup \bar{Y}} = X \cap Y$$

$$\overline{Y \cap \bar{Z}} \mid \overline{Y \cap \bar{X}} = X \cap \bar{Z} \cap Y$$

$$\bar{X} \cap (Y \cup Z) \cap X \cap Y = \emptyset;$$

8) $X \cup \overline{X \cap \bar{Y} \cup X \cap Z} = U$

$$\overline{Z \cap (X \cup Z \cap Y)} \cup \bar{X} = \bar{X} \cup \bar{Z}$$

$$X \cup \bar{Z} \cap (Y \mid \bar{X}) = X$$

$$\overline{X \cup Y \cap \bar{Z}} \mid \bar{X} \cup \bar{Z} = \emptyset;$$

1) $X \cap Y \cap (X \cap Z \cup X \cap Y \cap Z \cup Z \cap t) = X \cap Y \cap Z$

$$\overline{X \cap \bar{Y} \cap (Z \cup \bar{X})} = Y \cup \bar{X} \cup \bar{Z}$$

$$(X \mid (X \mid \bar{Y})) \cup (\bar{X} \mid (\bar{X} \mid \bar{Y})) = \bar{Y}$$

$$\bar{X} \cap (\bar{Z} \mid X \cup \bar{Z}) = \emptyset;$$

3) $X \cap Y \cup X \cap Y \cap Z \cup X \cap Y \cap Z \cup X \cap Y \cap Z = X \cap Y$

$$\overline{\bar{X} \cup (\bar{Y} \cup Z) \cup X \cap \bar{Y}} = X \cap \bar{Z} \cap Y$$

$$(X \mid \bar{X} \cup \bar{Y}) \mid \bar{Y} = X$$

$$(X \cap \bar{Y}) \mid (\bar{X} \cup \bar{Y}) = \emptyset;$$

5) $((X \cup Y) \cup (\bar{X} \cap \bar{Y})) \cap \overline{\bar{X} \cup \bar{Y}} = X \cap \bar{Y}$

$$\overline{\bar{X} \cap Y \cap \bar{Z} \cup \bar{X}} = (\bar{Y} \cup Z) \cap \bar{X}$$

$$X \mid Y \cup X \cap Z = X \mid Y \cap \bar{Z}$$

$$\overline{X \cup (Y \cap Z \cup \bar{X})} = \emptyset;$$

7) $(X \cup Y \cup Z) \cap (X \cup Y) \cup Z = X \cup Z \cup Y$

$$\overline{X \cap Y \cap (Z \cap X \cup Y)} = \bar{X} \cup \bar{Y}$$

$$Y \mid (X \cap Y \mid \bar{Y}) = Y \mid X$$

$$\overline{X \cup \bar{Y}} \mid \bar{X} \cup Y = \emptyset;$$

9) $(X \cup Z) \cap (X \cup Y) \cap (Y \cap Z) = Y \cap Z$

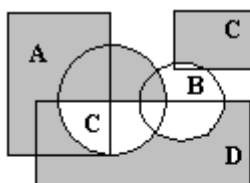
$$\overline{X \cup \bar{Y} \cap Z} \cap \overline{X \cap \bar{Z}} = (Y \cup \bar{Z}) \cap \bar{X}$$

$$(\overline{X \cap \bar{Z}} \mid \overline{X \cup \bar{Y}}) \mid \bar{X} = X \mid Z$$

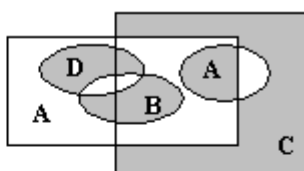
$$\overline{\bar{X} \cup \bar{Y}} \cap \bar{X} = \emptyset;$$

2. Представьте заштрихованные области формулами теории множеств, упрощая их, если возможно.

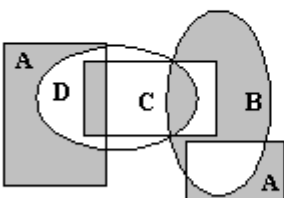
0)



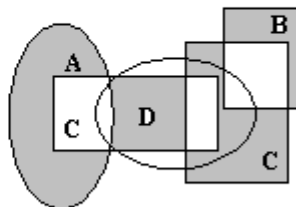
1)



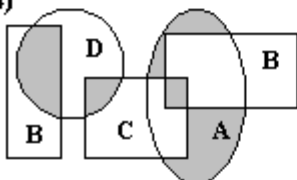
2)



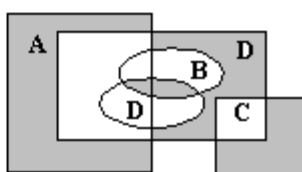
3)



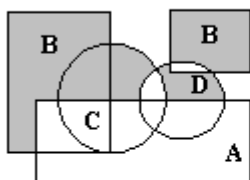
4)



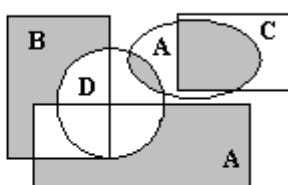
5)



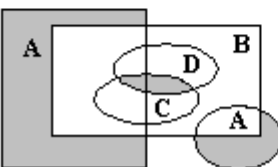
6)



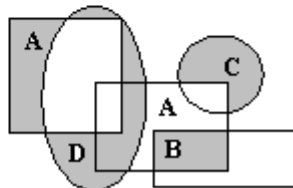
7)



8)



9)



3. Упростите выражения:

$$\begin{aligned}
 0) \quad & X \cup Y \cup (X \cup Y) \cap Z \equiv \\
 & \overline{Y \cap Z} \mid (\overline{Y \cap Z} \mid Y) \equiv \\
 & (X \Delta Y) \cap \overline{Y} \equiv \\
 & (\overline{X} \Delta Z) \cap (X \cap Y) \equiv \\
 & \overline{Z} \mid (\overline{Z} \mid \overline{X}) \cap X \equiv \\
 & (X \cup Y) \Delta (X \cap \overline{Y} \cap \overline{Z}) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad & \overline{X} \cap \overline{Y} \cup \overline{X} \cap \overline{Y} \cup X \equiv \\
 & \overline{X} \cap (Y \mid X \cup Y) \equiv \\
 & \overline{X} \cap (Y \Delta X) \equiv \\
 & (\overline{X} \cap \overline{Y}) \Delta X \equiv \\
 & (\overline{X \cap Z} \Delta \overline{X}) \mid \overline{X} \cup \overline{Z} \equiv \\
 & (X \cup Y) \mid (X \cap (Z \mid Y)) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 4) \quad & X \cap Y \cup (\overline{X \cap Y} \cup \overline{X}) \equiv \\
 & X \cup Y \mid (X \cup Y \mid \overline{X}) \equiv \\
 & Y \cap (X \Delta Y) \equiv \\
 & (\overline{X} \cup \overline{Y}) \Delta \overline{X} \equiv \\
 & \overline{Y} \cap (X \Delta Y) \equiv \\
 & \overline{X} \mid (\overline{Y} \mid \overline{X \cup Y}) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 6) \quad & (X \cap Y) \cap (X \cup Z) \equiv \\
 & (X \cap Y \cup Z) \mid X \equiv \\
 & (\overline{X \cap Y}) \Delta (\overline{X} \mid Y) \equiv \\
 & (\overline{X \Delta Y}) \cup \overline{X} \equiv \\
 & \overline{X} \cup Y \mid (X \cup Y \cap \overline{X}) \equiv \\
 & \overline{X} \Delta \overline{X} \cap \overline{Z} \equiv \overline{Z} \mid \overline{X} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad & X \cup Y \cup \overline{Z} \cup \overline{X} \cap \overline{Y} \equiv \\
 & ((X \cup Y) \mid X) \cap (Z \mid Y) \equiv \\
 & Y \Delta (\overline{X} \cup \overline{Y}) \equiv \\
 & (\overline{X \Delta Z}) \mid (Y \cap X) \equiv \\
 & (\overline{Z} \cap \overline{X} \cap Y) \mid (X \cup Y) \equiv \\
 & (\overline{X \cup Y}) \mid (\overline{Z \cup Y}) \equiv
 \end{aligned}$$

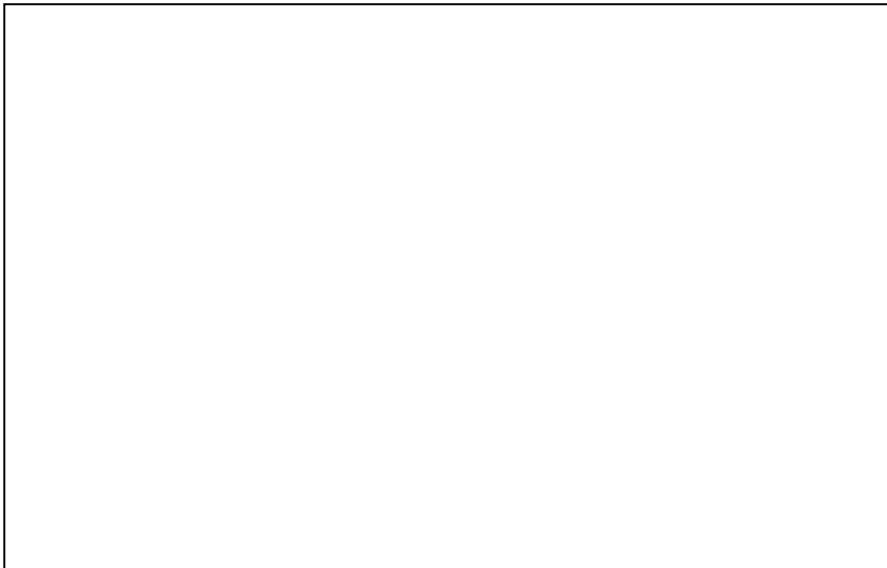
$$\begin{aligned}
 1) \quad & \overline{X} \cap \overline{Y} \cup \overline{X \cup Y} \cup \overline{Y} \equiv \\
 & (X \cup Y \mid Z) \mid (X \cap Z) \equiv \\
 & (X \cup Y) \cap (X \Delta \overline{X}) \equiv \\
 & (X \cap \overline{Y}) \Delta \overline{Y} \equiv \\
 & \overline{X} \Delta \overline{X} \cap \overline{Z} \equiv \\
 & \overline{Y \cup \overline{X} \cap \overline{X} \cap \overline{Y}} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 3) \quad & (X \cap Y) \cup (X \cap \overline{Y}) \equiv \\
 & ((X \cup Z) \mid X) \cup Y \cap \overline{X} \equiv \\
 & X \Delta (X \cap Y) \equiv \\
 & (\overline{X} \Delta Z) \cup (X \cap Y) \equiv \\
 & X \mid (\overline{X} \cap (X \cup \overline{Y})) \equiv \\
 & (\overline{Y} \Delta X) \mid \overline{X} \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 5) \quad & \overline{Z} \cup Z \cup \overline{Z} \equiv \\
 & Z \mid ((X \cup Y) \cup Z) \equiv \\
 & \overline{X} \cap (\overline{X} \Delta \overline{Y}) \equiv \\
 & (\overline{X} \cap Z) \cup (X \Delta Y) \equiv \\
 & (X \mid Z) \cup (X \cap Z) \equiv \\
 & (X \cup Y) \cup (X \Delta Y) \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad & \overline{X} \cap \overline{Y} \cup X \cup \overline{Z} \cup \overline{Y} \equiv \\
 & X \mid (Y \cap (X \cup \overline{Y})) \equiv \\
 & (Y \Delta X) \mid \overline{X} \equiv \\
 & (\overline{X} \cap \overline{Y}) \Delta (X \cup Y) \equiv \\
 & (\overline{X \Delta X} \cap \overline{Z}) \cap (\overline{Z} \mid \overline{X}) \equiv \\
 & \overline{X} \cap (Y \mid X) \cup Y \equiv
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad & \overline{Z} \cup \overline{Y} \cup (X \cup Z \cap Y) \equiv \\
 & X \mid (Y \mid \overline{X \cup Y}) \equiv \\
 & (X \cup Y \cup Z) \Delta (X \cap Y) \equiv \\
 & \overline{Y \cap Z} \Delta (\overline{Y \cap Z} \mid Y) \equiv \\
 & \overline{Y \cap Z} \mid (Z \mid Y) \equiv \\
 & X \cap Y \Delta \overline{Y} \cup X \equiv
 \end{aligned}$$



Практическое занятие №4. Отображение и отношение множеств

- Цель занятия:
1. изучить виды и суперпозиции отображений; виды отношений, заданные на множествах;
 2. получить навыки в вычислении декартового произведения.

Пусть X и Y - два множества. Если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый элемент $f(x)$ множества Y , то говорят, что задано *отображение* f из множества X в множество Y . Обозначение: $f: X \rightarrow Y$. При этом, если $f(x) = y$, то элемент y называется *образом* элемента x при отображении f , а элемент x называется *прообразом* элемента y при отображении f^{-1} .

Отображение $f: X \rightarrow Y$ является *сюръективным*, если каждый элемент $y \in Y$ имеет хотя бы один прообраз. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *инъективным*, если для любого элемента $y \in Y$ существует не более одного прообраза. Если отображение f сюръек-

тивно и инъективно одновременно, то оно называется *биективным* (*взаимно однозначным соответствием*).

Пусть $f: X \rightarrow Y$ и $g: Y \rightarrow Z$ - два отображения. Зададим правило h , применение которого к элементу x из X состоит в том, что мы применяем к x правило f , затем к результату $f(x)$ применяем второе правило g , получая в итоге $g(f(x))$. То есть $h(x) = g(f(x))$. Полученное отображение $h: X \rightarrow Z$ называют *композицией* отображений g и f и обозначают $h = g \circ f$. Тогда $g \circ f(x) = g(f(x))$.

Декартово произведение двух множеств A и B - множество упорядоченных пар $\langle a, b \rangle$ таких, что $a \in A$ и $b \in B$. Мощность декартова произведения равна произведению мощностей исходных множеств.

Бинарное отношение множеств A и B - подмножество декартова произведения A на B . *Область определения отношения* (*левая область отношения*) - множество всех первых элементов пар отношения. *Область значений отношения* (*правая область отношения*) - множество всех вторых элементов пар отношения.

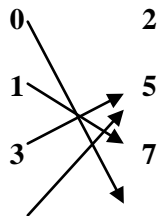
Отношение эквивалентности - отношение, являющееся одновременно рефлексивным, симметричным и транзитивным. *Рефлексивное* отношение на множестве A - отношение, которое справедливо для каждого элемента множества A как отношение этого элемента к самому себе. Например $=, \geq$ - рефлексивные, $\neq, >$ - нерефлексивные. *Симметричное* отношение - отношение, результат которого не меняется при перестановке операндов. *Транзитивное* отношение на множестве A - такое отношение, из справедливости которого для первого и второго операнда и справедливости для второго и третьего операнда следует справедливость этого отношения для первого и третьего операндов, при условии, что все операнды являются любыми элементами множества A .

Класс эквивалентности R - набор элементов множества, для которых эквивалентное отношение R будет давать одинаковый результат.

Примеры выполнения заданий

1. Для отображения $f: \{0,1,3,4\} \rightarrow \{2,5,7,8\}$, заданного рисунком, найдите $f(\{0,3\})$, $f(\{1,3,4\})$, $f^{-1}(2)$, $f^{-1}(\{2,5\})$, $f^{-1}(\{5,8\})$.

Решение: $f(\{0,3\}) = \{5, 8\}$;
 $f(\{1,3,4\}) = \{5, 7\}$;
 $f^{-1}(2) = \{\emptyset\}$;



$$f^{-1}(\{2,5\}) = \{3, 4\};$$

$$f^{-1}(\{5,8\}) = \{0, 3, 4\}$$

4

8

2. Выясните, к какому типу относится заданное отображение f :

$A = \{a, b, c\}$; $B = \{2, 4, 6, 8\}$; $f: a \rightarrow 2$; $b \rightarrow 4$; $b \rightarrow 6$; $c \rightarrow 8$;

Решение: находим образы: $y = f(x)$

$$f(a) = 2; f(b) = \{4, 6\}; f(c) = 8$$

Находим прообразы: $x = f^{-1}(y)$

$$f^{-1}(2) = a; f^{-1}(4) = b; f^{-1}(6) = b; f^{-1}(8) = c;$$

Все элементы из B имеют прообразы, значит f – сюръективно.

Т.к. элементы 4 и 6 имеют равные прообразы, то f – неинъективно.

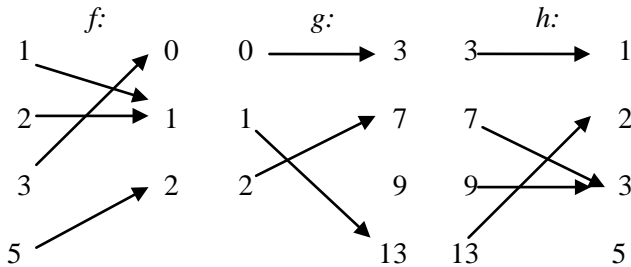
Следовательно, заданное отображение не является биективным.

3. Пусть $f: \{1,2,3,5\}$

$$g: \{0,1,2\},$$

$$h: \{3,7,9,13\}, \quad \square$$

$\{1,2,3,5\}$ – отображения, показанные на рисунке:

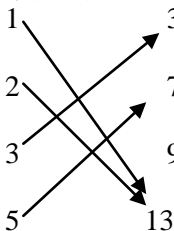


Нарисуйте композиции отображений:

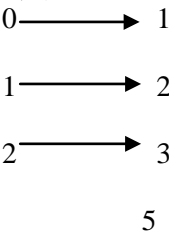
а) $g \square f$; б) $h \square g$; в) $h \square f \square g$;

Решение:

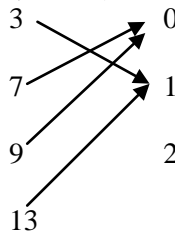
а) $f \square g$;



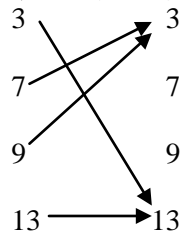
б) $g \square h$;



в) $h \square f$;



г) $h \square f \square g$;

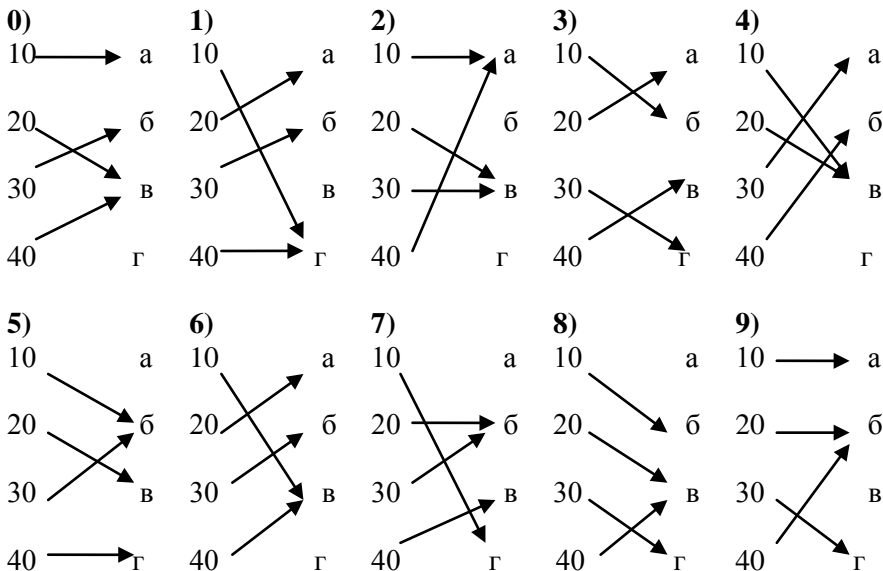


4. Установите биективное отображение между множеством $A = \{1, 6, 11, 16, 21, \dots\}$ и натуральным рядом чисел.

Решение: поставим в соответствие элементу натурального ряда "n" $n \leftrightarrow 1+5(n-1)$, т.е. $a_n = 1+5(n-1) \in A$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Для отображения $f: \{10, 20, 30, 40\} \rightarrow \{a, б, в, г\}$, заданного рисунком, найдите $f(\{10, 40\})$, $f(\{10, 20, 30\})$, $f^{-1}(б)$, $f^{-1}(\{a, в\})$, $f^{-1}(\{б, в, г\})$.



2. Найдите декартово произведение множеств $C = A \times B$:

0) $A = \{1, 2, 3\}; B = \{7, 8, 9\};$

1) $A = \{2, 3, 4, 9\}; B = \{1, 7\};$

2) $A = \{1, 7\}; B = \{2, 4, 6, 8\}$

3) $A = \{3, 5, 10\}; B = \{2, 8, 9\};$

4) $A = \{2, 3, 4, 5\}; B = \{6, 10\}$

5) $A = \{5, 6\}; B = \{1, 7, 9, 2\};$

6) $A = \{10, 1, 2\}; B = \{1, 2, 8\};$

7) $A = \{10, 11, 12\}; B = \{2, 8, 9\};$

8) $A=\{6,9\}; B=\{1,2,3,5\};$

9) $A=\{2,3,5,6\}; B=\{9,12\};$

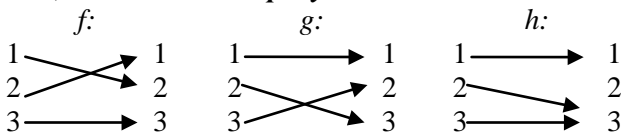
| |
|--|
| |
|--|

3. Выясните, к какому типу относятся отображения $f1: A \rightarrow B$ и $f2: A \rightarrow B$.

| | | | |
|------------------------|------------------------|--|---|
| 0) $A=\{x, y, z\};$ | $B=\{1, 2, 3, 4\};$ | $f1: x \rightarrow 1; y \rightarrow 2;$ $z \rightarrow 3;$ | $f2: x \rightarrow 4; y \rightarrow 1;$ $z \rightarrow 4;$ |
| 1) $X=\{a,b,c,d,e\};$ | $Y=\{2, 4, 6\};$ | $f1: a \rightarrow 2; b \rightarrow 2;$ $c \rightarrow 4; d \rightarrow 6;$ | $f2: a \rightarrow 2; b \rightarrow 4;$ $c \rightarrow 4; d \rightarrow 6; e \rightarrow 6;$ |
| 2) $A=\{1, 2, 3, 4\};$ | $B=\{a, b, c, d\};$ | $f1: 1 \rightarrow a; 2 \rightarrow b;$ $3 \rightarrow c; 4 \rightarrow d;$ | $f2: 1 \rightarrow b; 2 \rightarrow c;$ $3 \rightarrow d; 4 \rightarrow d;$ |
| 3) $X=\{a, b, c\};$ | $B=\{1, 2, 3, 4, 5\};$ | $f1: a \rightarrow 1; b \rightarrow 2;$ $c \rightarrow 4;$ | $f2: a \rightarrow 1; b \rightarrow 1;$ $c \rightarrow 3;$ |
| 4) $A=\{x, y, z\};$ | $B=\{1, 2, 3, 4\};$ | $f1: x \rightarrow 1; y \rightarrow 2;$ $z \rightarrow 4;$ | $f2: x \rightarrow 1; y \rightarrow 3;$ $z \rightarrow 4;$ |
| 5) $A=\{1, y, z\};$ | $B=\{2, 3, 4\};$ | $f1: 1 \rightarrow 2; y \rightarrow 2;$ $z \rightarrow 3;$ | $f2: 1 \rightarrow 2; y \rightarrow 3;$ $z \rightarrow 4;$ |
| 6) $X=\{a, b, c, e\};$ | $Y=\{2, 5, 6\};$ | $f1: a \rightarrow 2; b \rightarrow 2;$ $c \rightarrow 5; e \rightarrow 6;$ | $f2: a \rightarrow 6; b \rightarrow 5;$ $c \rightarrow 5; e \rightarrow 2;$ |
| 7) $A=\{2, 3, 4, 5\};$ | $B=\{a, b, c\};$ | $f1: 2 \rightarrow a; 3 \rightarrow a;$ $4 \rightarrow b; 5 \rightarrow c;$ | $f2: 2 \rightarrow a; 5 \rightarrow b;$ $3 \rightarrow c; 4 \rightarrow c;$ |
| 8) $X=\{2, b, c\};$ | $B=\{3, 4, 5\};$ | $f1: 2 \rightarrow 3; b \rightarrow 5;$ $c \rightarrow 5;$ | $f2: 2 \rightarrow 4; b \rightarrow 3;$ $c \rightarrow 5;$ |
| 9) $A=\{x, y, 3\};$ | $B=\{2, 4, 5, 7\};$ | $f1: x \rightarrow 2; y \rightarrow 2;$ $3 \rightarrow 7;$ | $f2: x \rightarrow 4; y \rightarrow 5;$ $3 \rightarrow 2;$ |

| |
|--|
| |
|--|

4. Пусть $f: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$, $g: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$, $h: \{1,2,3\} \rightarrow \{1,2,3\}$ -
отображения, показанные на рисунке:



Нарисуйте композиции отображений:

| | | | | |
|---|----------------------------------|----------------------------------|---|--|
| 0) $g \square \square$ $\square \square g$ | 1) $h \square \square \square f$ | 2) $h \square \square \square g$ | 3) $g \square \square h$ $\square \square$ g | 4) $h \square \square f$ $\square \square$ h |
| 5) $f \square \square \square$ | 6) $g \square \square \square h$ | 7) $h \square \square \square h$ | 8) f $\square \square$ $h \square$ \square | 9) $g \square \square h$ $\square \square$ |

Практическое занятие №5. Отображение и отношение множеств

Задания для самостоятельного выполнения

1. Установите биективное отображение между множеством A и натуральным рядом чисел.

- | | |
|--|---|
| 0) $A = \left[\frac{1}{2}; 6 \right);$ | 5) $A = \left(-\frac{3}{2}; 5 \right];$ |
| 1) $A = \left(\frac{1}{6}; 9 \right);$ | 6) $A = \left[-\frac{1}{6}; 8 \right);$ |
| 2) $A = \left(\frac{2}{7}; 10 \right];$ | 7) $A = \left[\frac{4}{5}; 10 \right];$ |
| 3) $A = \left(-4; \frac{3}{5} \right);$ | 8) $A = \left[-7; -\frac{1}{5} \right);$ |
| 4) $A = \left[-\frac{1}{7}; 7 \right);$ | 9) $A = \left(-6; \frac{3}{4} \right);$ |

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x + 1) \cdot (x^2 - x - 6) = 0\}$$

2) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 81\}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + x - 2) \cdot (x^2 - 7x + 6) = 0\}$$

4) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 65,$

x –квадрат числа}

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 6x + 5) \cdot (x^2 - x - 12) = 0\}$$

6) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 36\}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 3x - 4) \cdot (x^2 + x - 12) = 0\}$$

8) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 78,$

x –квадрат числа}

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x + 2) \cdot (x^2 - 4x - 5) = 0\}$$

3) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 51,$

x –квадрат числа}

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 3x - 4) \cdot (x^2 - 9x + 20) = 0\}$$

5) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 54\}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x - 6) \cdot (x^2 - 5x + 4) = 0\}$$

7) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x \leq 64,$

x –квадрат числа}

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 + 4x - 5) \cdot (x^2 - 7x + 12) = 0\}$$

9) $B = \{x \in \mathbb{N} \mid x - \text{делитель } 32\}$

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid (x^2 - 5x + 6) \cdot (x^2 + x - 20) = 0\}$$

3. Пусть $A = \{1, 2, 3\}$. Установите, является ли каждое из приведенных ниже отношений R , заданных на множестве A , отношением эквивалентности.

a) $R_1 = \{(2,2), (1,1), (1,2)\};$

б) $R_2 = \{(1,1), (2,2), (3,3)\};$

в) $R_3 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (2,1), (3,1), (1,3)\};$

г) $R_4 = \{(1,1), (2,2), (3,3), (1,2), (3,2), (2,1)\};$

д) $R_5 = \{(1,1), (1,2), (3,3), (2,2), (3,2), (2,3), (2,1)\};$

е) $R_6 = \{(1,1), (1,3), (2,3), (1,2), (3,2), (2,1), (3,1)\};$

Контрольные вопросы

по теме «Элементы теории множеств»

| | |
|----------|--|
| А | <i>Сколько существует подмножеств у конечного множества? Почему?</i> |
| Б | <i>Какими свойствами обладает операция пересечения множеств?</i> |
| В | <i>Что понимается под “элемент”, “множество”, “подмножество”?</i> |
| Г | <i>Какими свойствами обладает операция объединения множеств?</i> |
| Д | <i>Как проиллюстрировать диаграммами Венна дистрибутивные законы?</i> |
| Е | <i>Что такое мощность множества?</i> |
| Ё | <i>Какие множества имеют несчетную мощность?</i> |
| Ж | <i>Какие множества имеют счетную мощность?</i> |
| З | <i>Какими свойствами обладает операция пересечения множеств?</i> |
| И | <i>Какими свойствами обладает универсальное множество?</i> |
| Й | <i>Какие множества эквивалентны множеству натуральных чисел?</i> |
| К | <i>Как проиллюстрировать диаграммами Венна законы поглощения?</i> |
| Л | <i>Как формулируются законы Де Моргана над множествами?</i> |
| М | <i>Какие множества называются несобственными?</i> |
| Н | <i>Какими свойствами обладает операция разности множеств?</i> |
| О | <i>Как доказать эквивалентность двух множеств?</i> |
| П | <i>Какие способы задания множеств вы знаете?</i> |
| Р | <i>Какими свойствами обладает пустое множество?</i> |
| С | <i>Какие операции выполняются над множествами?</i> |
| Т | <i>Как проиллюстрировать диаграммами Венна законы ДЕ Моргана?</i> |
| У | <i>Какие множества называются равными?</i> |
| Ф | <i>Какими свойствами обладает операция симметрической разности?</i> |
| Х | <i>Какие множества называют равными?</i> |
| Ц | <i>Как проиллюстрировать диаграммами Венна коммутативные законы?</i> |
| Ч | <i>Какими свойствами обладает операция дополнения до универсума?</i> |
| Ш | <i>Как формулируются законы поглощения теории множеств?</i> |
| Щ | <i>В чем отличие понятий “принадлежность множеству” и “включение в множество”?</i> |
| Ъ | <i>Как проиллюстрировать диаграммами Венна ассоциативные законы?</i> |
| Ы | <i>Какие Вам известны виды отображений множеств?</i> |

| | |
|----------|--|
| Б | <i>Какие множества называют эквивалентными?</i> |
| Э | <i>Какими свойствами обладает операция объединения множеств?</i> |
| Ю | <i>Какие отношения множеств Вам известны?</i> |
| Я | <i>Какие множества называют конечными, бесконечными?</i> |

Глава 2. Элементы математической логики

Практическое занятие №6. Основы алгебры логики

- Цель занятия:
1. получить навыки в записи сложных высказываний формулами алгебры логики;
 2. изучить основные понятия и законы алгебры логики;
 3. получить навыки в применении законов и равносильностей алгебры логики к преобразованию сложных высказываний.

1. Элементы логики высказываний

Исследования в алгебре логики тесно связаны с изучением *высказываний*, представляющих собой повествовательное предложение, относительно которого объективно можно сказать, что оно либо истинно, либо ложно. Из одних высказываний могут составляться другие, более сложные высказывания, называемые *составными*. *Простые* высказывания обозначаются буквами латинского алфавита: А, В, С,... и являются *логическими переменными* со значениями истина, либо ложь. Значения истинности высказывания обозначается буквой **И** (истина) или 1, а ложность обозначается **Л** (ложь) или 0. **И** или **Л** называются *логическими константами*. Составные высказывания могут строиться из простых с помощью *логических связей*, которым соответствуют *логические операции* (см. табл.2). Логические операции задаются таблично:

| А | В | $\neg A$ | $A \vee B$ | $A \& B$ | $A \rightarrow B$ | $A \oplus B$ | $A \sim B$ | $A B$ | $A \downarrow B$ |
|---|---|----------|------------|----------|-------------------|--------------|------------|---------|------------------|
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |

Из логических переменных и констант, соединенных логическими операциями и скобками строятся *логические формулы*.

При вычислении значения формулы учитывают *приоритет* выполнения логических операций. Операции в таблице 2 перечисле-

ны по убыванию приоритета.

Таблица 2. Соответствие логических связей логическим операциям

| <i>Логическая связка</i> | <i>Название логических операций</i> | <i>Обозначения операций</i> |
|--|--|--|
| не | Отрицание, инверсия | \neg |
| и, а, но, хотя | Конъюнкция, логическое умножение | $\&, \cdot, \wedge$ |
| или | Дизъюнкция, нестрогая дизъюнкция, логическое сложение | $\vee, +$ |
| либо | Разделительная (строгая) дизъюнкция, исключающее ИЛИ, сложение по модулю 2 | \oplus, Δ |
| если..., то | Импликация, следование | \rightarrow, \Rightarrow |
| тогда и только тогда, когда необходимо и достаточно | Эквивалентность, эквиваленция, равнозначность | $\sim, \Leftrightarrow, \equiv, \leftrightarrow$ |
| не (... и ...) | Отрицание конъюнкции, Штрих Шеффера | $ $ |
| не (... или ...) | Отрицание дизъюнкции, стрелка Пирса, функция Вебба, функция Даггера | \downarrow, \circ |

Примеры выполнения заданий

1. Переформулируйте высказывания, если необходимо. Разбейте составные высказывания на простые и запишите их с помощью логической символики. Постройте таблицу истинности.

"Если наступит мир, то возникнет депрессия, разве что страна проведёт программу перевооружения, либо осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п.; но невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений; значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения."

Решение: обозначим простые высказывания буквами:

M - "наступит мир",

Д - "возникнет депрессия",

П - "страна проведёт программу перевооружения",

К - "страна осуществит грандиозную программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п."

Переформулируем предложение, сохранив смысл, но используя более стандартные обороты:

"Если наступит мир и страна не выполнит программу перевооружения или программу внутренних капиталовложений в области образования, охраны окружающей среды, борьбы с бедностью т. п., то возникнет депрессия; но невозможно договориться о целях такой грандиозной программы внутренних капиталовложений (т.е. эта программа выполняться не будет); значит, если наступит мир и не будет депрессии, то непременно будет осуществляться программа перевооружения."

Запишем высказывание с помощью наших обозначений и логических операций: $((M \wedge \neg(P \vee K) \rightarrow D) \wedge \neg K) \rightarrow ((M \wedge \neg D) \rightarrow P) \equiv$

$$\equiv ((M \wedge (P \downarrow K) \rightarrow D) \wedge \neg K) \rightarrow ((M \wedge \neg D) \rightarrow P)$$

Построим таблицу истинности.

| М | П | Д | К | $(M \wedge (P \downarrow K) \rightarrow D) \wedge \neg K$ | $(M \wedge \neg D) \rightarrow P$ | $() \rightarrow ()$ |
|---|---|---|---|---|-----------------------------------|-----------------------|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

2. Вычислите значение выражения $b \rightarrow a \downarrow b \& a \vee \bar{a}$ при $a=1, b=0$.

Решение: сначала определим порядок выполнения операций.

$$1) b \& a = 0 \& 1 = 0; \quad 2) b \& a \vee \bar{a} = 0 \vee 0 = 0;$$

$$3) b \rightarrow a = 0 \rightarrow 1 = 1; \quad 4) b \rightarrow a \downarrow b \& a \vee \bar{a} = 1 \downarrow 0 = 0.$$

2. Равносильные преобразования формул алгебры логики

Любую формулу алгебры логики можно преобразовать к равносильной ей, в которой используются только аксиоматически введенные операции: конъюнкция, дизъюнкция и отрицание.

Преобразования логических формул похожи на преобразования формул в обычной алгебре (вынесение общего множителя за скобки, использование переместительного и сочетательного законов и т.п.), тогда как другие преобразования основаны на свойствах, которыми не обладают операции обычной алгебры (использование распределительного закона для конъюнкции, законов поглощения, склеивания, де Моргана и др.). Логические операции обладают рядом свойств и подчинены логическим законам (см. табл.3).

Операции строгой дизъюнкции, импликации, эквиваленции, штрих Шеффера и стрелка Пирса могут быть равносильно выражены через операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания, поэтому они считаются как бы избыточными.

Логические равносильности алгебры логики:

$$a \rightarrow b \equiv \bar{a} \vee b;$$

$$a \oplus b \equiv \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b};$$

$$a \sim b \equiv a \& b \vee \bar{a} \& \bar{b}.$$

$$a \mid b \equiv \neg (a \& b)$$

$$a \downarrow b \equiv \neg (a \vee b)$$

Равносильное упрощение формул выполняется по шагам:

1. замена операций импликации, строгой дизъюнкции, эквиваленции, функции Шеффера и стрелки Пирса логическими равносильностями;

2. применение законов алгебры логики.

Таблица 3. Свойства и законы алгебры логики

| Название | Содержание |
|---|--|
| Коммутативность (переместительный) | $a \vee b \equiv b \vee a$ $a \& b \equiv b \& a$ |
| | $a \oplus b \equiv b \oplus a$ |
| Ассоциативность (сочетательный) | $a \vee (b \vee c) \equiv (a \vee b) \vee c$ |
| | $a \& (b \& c) \equiv (a \& b) \& c$ |
| | $a \oplus (b \oplus c) \equiv (a \oplus b) \oplus c$ |
| Дистрибутивность (распределительный) | $a \& (b \vee c) \equiv (a \& b) \vee (a \& c)$ |
| | $a \vee (b \& c) \equiv (a \vee b) \& (a \vee c)$ |
| Закон снятия двойного отрицания | $\overline{\overline{a}} \equiv a$ |
| Законы де Моргана следствие закона | $\overline{a \& b} \equiv \overline{a} \vee \overline{b}$ |
| | $\overline{a \vee b} \equiv \overline{a} \& \overline{b}$ |
| | $a \vee b \equiv \overline{\overline{a \& b}}; a \& b \equiv \overline{\overline{a \vee b}}$ |
| Законы поглощения | $a \vee a \& b \equiv a$ $a \& (a \vee b) \equiv a$ |
| Свойства константы Л | $a \vee \mathbf{Л} \equiv a$ $a \& \mathbf{Л} \equiv \mathbf{Л}$ |
| Свойства константы И | $a \vee \mathbf{И} \equiv \mathbf{И}$ $a \& \mathbf{И} \equiv a$ |
| Закон исключения третьего | $\overline{\overline{a}} \vee a \equiv \mathbf{И}$ |
| Законы идемпотентности | $a \vee a \equiv a$ $a \& a \equiv a$ |
| Закон противоречия | $\overline{a} \& a \equiv \mathbf{Л}$ |
| Законы склеивания | $(a \& b) \vee (\overline{a} \& b) \equiv b$ $(a \vee b) \& (\overline{a} \vee b) \equiv b$ |

Примеры выполнения заданий

1. Докажите: $x \& \overline{y} \vee \overline{x \vee y} \equiv \overline{y}$;

1) $x \& \overline{y} \vee \overline{x \vee y} \equiv x \& \overline{y} \vee \overline{x} \vee \overline{y}$ (по закону де Моргана);

2) $x \& \overline{y} \vee \overline{x} \& \overline{y} \equiv \overline{y} \& (x \vee \overline{x})$ (по дистрибутивному закону);

3) $\overline{y} \& (x \vee \overline{x}) \equiv \overline{y} \& \mathbf{И}$ (по закону исключения третьего);

4) $\bar{y} \& I \equiv \bar{y}$ (по свойству логической константы I).

2. Упростите: $x \& (y \rightarrow x) \rightarrow \bar{y} \equiv$

1) $x \& (y \rightarrow x) \rightarrow \bar{y} \equiv x \& (\bar{y} \vee x) \rightarrow \bar{y}$ (по равносильности);

2) $x \& (\bar{y} \vee x) \rightarrow \bar{y} \equiv x \& (\bar{y} \vee x) \vee \bar{y}$ (по равносильности);

3) $x \& (\bar{y} \vee x) \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee (\bar{y} \& \bar{x}) \vee \bar{y}$ (по закону де Моргана);

4) $\bar{x} \vee (\bar{y} \& \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee (y \& \bar{x}) \vee \bar{y}$ (по закону снятия дв. отрицания);

5) $\bar{x} \vee (y \& \bar{x}) \vee \bar{y} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$ (по закону поглощения).

3. Определите тождественную истинность или ложность формулы $X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y \equiv$

1) $X \& Y \& \bar{X} \rightarrow Y \equiv X \& Y \& \bar{x} \vee Y$ (по равносильности)

2) $X \& Y \& \bar{x} \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee x \vee Y$ (по закону де Моргана)

3) $\bar{X} \vee \bar{y} \vee x \vee Y \equiv \bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y$ (по закону снятия дв. отрицания);

4) $\bar{X} \vee \bar{y} \vee X \vee Y \equiv \bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y$ (по коммутативному закону);

5) $\bar{X} \vee X \vee \bar{y} \vee Y \equiv I \vee I \equiv I$ (по закону исключения третьего).

Задания для самостоятельного выполнения

1. Переформулируйте высказывания, если необходимо. Разбейте составные высказывания на простые и запишите их с помощью логической символики. Постройте таблицу истинности.

0) Если усложнить схему устройства, то возрастает его производительность, а если использовать новую элементную базу, то увеличится период эксплуатации. Устройство начнут хорошо раскупать только при одновременном росте его производительности и периода эксплуатации. Но устройство не пользуется спросом.

1) Увеличение денег в обращении влечёт за собой инфляцию. Но рост денежной массы происходит по двум причинам: из-за денежной эмиссии или снижения товарооборота. Снижение товарооборота приводит к безработице и спаду производства. Из-за инфляции падает курс денежной единицы. Рекомендации экономиста Иванова: увели-

чить денежную эмиссию и поднять производство, тогда избежим безработицы, и курс денежной единицы останется неизменным.

2) Любой марксист-диалектик, но не всякий диалектик-марксист. Любой марксист-материалист, но не всякий материалист-марксист. Гегель был диалектик, но не материалист. Фейербах был материалист, но не диалектик. Итак, если бы Гегель и Фейербах могли объединиться в один кружок, то Маркс уже не понадобился бы.

3) Существуют две теории возникновения человека на земле - теория эволюции Дарвина и теория сотворения человека Господом Богом. Если справедлива теория эволюции, то самопроизвольное возникновение человека без соответствующих превращений живых организмов невозможно. Как доказали учёные, такие превращения действительно имели место. По теории же сотворения человек был слеплен из простой глины, а жизнь в него вдохнул господь. Глины всегда было много, а на счёт дыхания Бога тоже сомневаться не приходится, поскольку есть на то свидетельство Библии. Отсюда вывод – две названные теории друг другу не противоречат.

4) Из утверждения "два плюс два равно пяти" следует, что я и папа римский - одно и то же лицо. В самом деле, если от обеих частей указанного равенства отнять по двойке, то будет справедливо равенство "два равно трём". Если от обеих частей нового равенства отнять по единице, то будет справедливо равенство - "один равен двум". Один - это я, а двойка - это я и папа римский. Поскольку верно, что "один равен двум", то я есть папа римский.

5) Сегодня посмотрю футбол, если трамвай не задержится. Трамвай не опоздал, но случилась другая беда: у меня не оказалось денег на билет. Рискну доехать «зайцем». В салоне оказался контролер, и я лихорадочно стал рыться по карманам. К моему счастью, нашелся один неиспользованный трамвайный талон. До компостера я добрался вовремя, хотя футбольный матч я так и не увидел: вместе с деньгами я дома оставил и билет на матч.

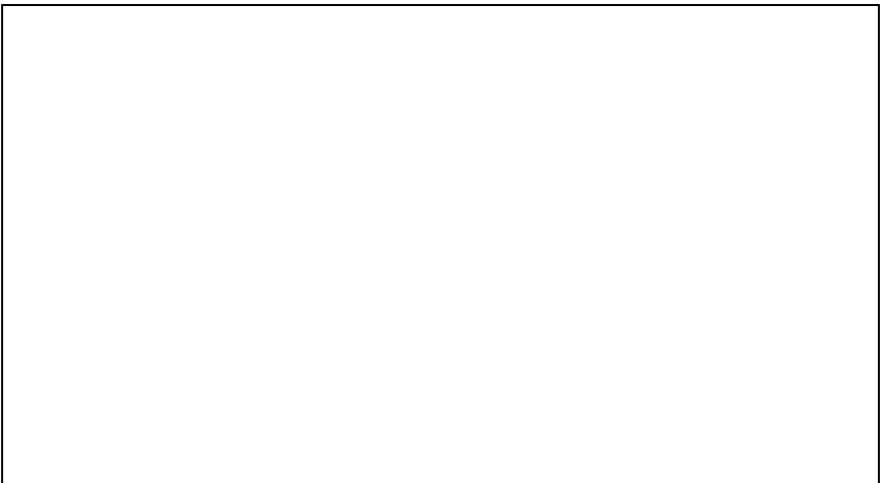
6) Если в одном месте что-то убудет, то в другом месте что-то прибудет – это истина, не требующая доказательств. Но есть такая теория, которая утверждает: где-то в далеком космосе существуют «черные дыры», куда все проваливается, но оттуда ничего не появляется. Эта теория ничего не говорит о существовании «белых дыр», которые действовали бы противоположно «черным». Один иностранный астрономический журнал сообщил координаты «черной дыры». Россий-

ский астроном Иванов направил туда мощный телескоп и ничего не обнаружил. «Так-так, - сказал Иванов, - но «белую дыру» я все же открою».

7) Если в цепи будет большой перепад напряжения, то сгорит предохранитель, что повлечет за собой необходимость его замены. При целом предохранителе телевизор, конечно, будет работать, но только если он включен в сеть питания. Если телевизор работает нормально, то я увижу сегодняшние «Новости». Итак, я смотрю телевизионные «Новости» при условии отсутствия перепада напряжения и подключения телевизора к сети питания.

8) Уменьшение температуры приводит к снижению давления и уменьшению объема. Увеличение объема приводит к росту скорости потока. Повышение давления приводит к падению уровня, если при этом уменьшать температуру. Снижение скорости приводит к уменьшению давления или росту температуры. Технолог Иванов рассудил так: «Мне надо повысить давление при одновременном снижении скорости потока, поэтому я должен увеличить объем и температуру».

9) «Если знать язык программирования, то можно составить рабочую программу. Рабочую программу можно также получить при условии наличия знакомого программиста. Овладеть языком программирования можно, обучаясь в институте. Если программа работает, то ее написал выпускник такого института. Но программа не работает. Это говорит о том, что желающий получить правильный результат не знает языка программирования и не имеет знакомых программистов».



| | | |
|----|--|---------------------|
| 0) | $\bar{a} \vee b \& a \downarrow a \sim \bar{b}$ | $npu \ a=1, \ b=0;$ |
| 1) | $a \sim (b \mid \bar{a}) \vee b \& \bar{a}$ | $npu \ a=0, \ b=1;$ |
| 2) | $\bar{b} \mid a \oplus b \rightarrow a \& b$ | $npu \ a=0, \ b=0;$ |
| 3) | $(a \mid b) \vee \bar{b} \& \bar{a} \oplus a$ | $npu \ a=0, \ b=1;$ |
| 4) | $\bar{a} \vee b \mid a \vee a \sim \bar{b}$ | $npu \ a=0, \ b=1;$ |
| 5) | $a \sim (b \rightarrow \bar{a}) \oplus b \downarrow \bar{a}$ | $npu \ a=1, \ b=0;$ |
| 6) | $\bar{b} \sim a \oplus b \mid a \& b$ | $npu \ a=1, \ b=0;$ |
| 7) | $(a \oplus b) \mid \bar{b} \& \bar{a} \vee b$ | $npu \ a=0, \ b=0;$ |
| 8) | $\bar{a} \downarrow b \& a \vee a \sim \bar{b}$ | $npu \ a=0, \ b=0;$ |
| 9) | $a \mid (b \rightarrow \bar{a}) \oplus b \& \bar{a}$ | $npu \ a=0, \ b=0;$ |

| |
|--|
| |
|--|

3. Постройте таблицы истинности формулы алгебры логики:

0) $\bar{a} \mid b \rightarrow \bar{c} \& a$

5) $(a \oplus b) \mid \bar{c} \vee a$

1) $a \rightarrow b \oplus a \downarrow c$

6) $(\overline{b \& c \vee a}) \downarrow \bar{a}$

2) $a \vee \bar{b} \downarrow c \rightarrow \bar{a}$

7) $a \downarrow b \vee \bar{a} \& \bar{c}$

3) $\overline{b \& a \oplus \bar{a} \mid c}$

8) $a \& b \mid \bar{b} \rightarrow c$

4) $a \rightarrow \bar{b} \downarrow \overline{a \sim c}$

9) $\bar{a} \rightarrow \bar{b} \oplus c \downarrow a$

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | | | |
|----------|----------|----------|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

Практическое занятие №7. Основы алгебры логики

Задания для самостоятельного выполнения

1. Упростите формулы алгебры логики:

0) $X \downarrow Y \& X \mid \bar{X}$

1) $X \rightarrow Y \mid \bar{X} \& \bar{Y}$

2) $X \vee Y \downarrow \overline{X \& Y}$

3) $X \& \bar{X} \rightarrow \bar{Y} \mid Y$

4) $Y \rightarrow \bar{X} \oplus Y \downarrow \bar{Y}$

5) $X \rightarrow Y \oplus \bar{X} \mid \bar{Y}$

6) $\bar{X} \downarrow \bar{X} \& \bar{Y} \rightarrow \bar{X}$

7) $\bar{X} \downarrow \bar{Y} \& \overline{X \rightarrow Y}$

8) $X \oplus \bar{X} \vee \bar{Y} \downarrow X$

9) $Y \rightarrow \bar{X} \downarrow \overline{\bar{Y} \vee X}$

2. Определите, какие из формул являются тождественно истинными или тождественно ложными:

- 0) $\overline{X} \& Y \sim \overline{X} \rightarrow \overline{Y} \equiv$
- 1) $\overline{X} \sim Y \& X \vee \overline{X} \oplus Y \& X \equiv$
- 2) $(\overline{X} \oplus Y) \& (X \sim \overline{Y}) \equiv$
- 3) $(X \sim \overline{Y}) \vee X \vee Y \& (\overline{X} \vee \overline{Y}) \equiv$
- 4) $\overline{X} \& \overline{Y} \sim \overline{X} \vee \overline{Y} \equiv$
- 5) $((X \vee \overline{Y}) \rightarrow Y) \& (\overline{X} \vee Y) \equiv$
- 6) $X \rightarrow Y \sim \overline{Y} \rightarrow \overline{X} \equiv$
- 7) $\overline{X} \& Y \sim \overline{X} \sim \overline{Y} \rightarrow X \equiv$
- 8) $X \vee \overline{Z} \& \overline{Y \oplus Z} \& X \equiv$
- 9) $Y \& X \rightarrow Y \& X \& Y \equiv$

3. Докажите равносильности, используя законы логики:

- 0) $\overline{X \vee Y \vee (X \vee \overline{Y})} \equiv X \vee \overline{Y}$
- 1) $(X \vee Y) \& (\overline{X \vee Y}) \& (\overline{X \vee \overline{Y}}) \equiv Y \& \overline{X}$
- 2) $X \& \overline{Y} \vee \overline{X} \& Y \& Z \vee X \& Z \equiv X \& \overline{Y} \vee Y \& Z$
- 3) $(X \vee Y) \& (X \vee \overline{y}) \equiv X;$
- 4) $(X \& Y \vee Z) \& (X \vee Y) \vee Z \equiv X \vee Z \vee Y$
- 5) $Y \vee Y \& \overline{X \vee \overline{Y}} \equiv Y$
- 6) $\overline{X \vee Y} \& X \rightarrow \overline{Y} \vee X \equiv X \vee \overline{Y}$
- 7) $Z \vee Y \& Z \vee X \& \overline{z} \equiv Z \vee X;$
- 8) $Y \vee \overline{x} \rightarrow Y \vee X \equiv X \vee Y;$
- 9) $Y \& \overline{\overline{X \vee \overline{Z \vee \overline{Y \vee X}}}} \equiv Y \& Z \vee \overline{X}$

4. Докажите равносильности, используя законы логики:

- 0) a) $\bar{x} \rightarrow \bar{y} \oplus \bar{x} \equiv x \vee y$; b) $\overline{\bar{x} \vee y \vee \bar{x} \vee \bar{y}} \equiv \overline{x \sim y}$;
- 1) a) $x \rightarrow (y \rightarrow z) \equiv x \& y \rightarrow z$; b) $x \rightarrow y \oplus \bar{x} \equiv \bar{x} \vee y$;
- 2) a) $x \sim y \& \bar{x} \equiv \overline{x \vee y}$; b) $x \oplus y \& \bar{x} \equiv x \vee y$;
- 3) a) $x \& (x \rightarrow y) \equiv x \& y$; b) $x \oplus y \rightarrow \bar{x} \vee y \equiv \bar{x} \vee y$;
- 4) a) $x \rightarrow y \vee \bar{x} \& \bar{y} \equiv \bar{x} \vee y$; b) $(x \oplus \bar{y}) \vee \bar{x} \& \bar{y} \equiv \bar{x} \& \bar{y}$;
- 5) a) $\bar{y} \& (\bar{x} \vee y) \rightarrow y \equiv x \vee y$; b) $x \rightarrow y \vee \bar{x} \oplus y \vee x \& y \equiv \bar{x}$;
- 6) a) $\overline{x \rightarrow y \vee x} \& \overline{\bar{y} \& x \rightarrow y} \equiv y$; b) $\bar{x} \oplus y \rightarrow x \equiv x \vee y$;
- 7) a) $(\overline{x \vee \bar{y} \rightarrow x \vee y}) \& y \equiv y$; b) $\bar{x} \oplus \bar{y} \& \overline{x \rightarrow \bar{y}} \equiv \bar{x} \vee \bar{y}$;
- 8) a) $\bar{x} \rightarrow \bar{y} \oplus x \sim y \equiv x \& y$; b) $\overline{x \oplus \bar{y} \vee \bar{x} \& \bar{y}} \equiv x \sim y$;
- 9) a) $x \oplus \bar{x} \rightarrow \bar{y} \equiv \bar{y}$; b) $\bar{x} \rightarrow y \sim x \equiv x \vee \bar{y}$;

Практическое занятие №8. Логические функции

- Цель занятия:
1. изучить способы представления и суперпозиции логических функций;
 2. привить навыки построения канонических форм логических функций;
 3. изучить способы определения полноты системы логических функций.

Логической функцией называют функцию $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ аргументы которой x_1, x_2, \dots, x_n и сама функция принимают значения 0 или 1. Для $n = 0$ – (*нульарные функции*) существует 2 различные логические функции, значения: константы И и Л; $n = 1$ (*унарные функции*) существует 4 различных логических функций, значения:

$$g_1(x)=Л; g_2(x)=\neg x, g_3(x)=x, g_4(x)=И,$$

$n = 2$ (*бинарные функции*) существует 16 различных логических функций:

$$\begin{array}{ll} f_1(x,y)=0=g_1(0) & f_5(x,y)=\neg(y \rightarrow x) \\ f_2(x,y)=x \& y & f_6(x,y)=y=g_3(y) \\ f_3(x,y)=\neg(x \rightarrow y) & f_7(x,y)=x \oplus y \\ f_4(x,y)=x=g_3(x) & f_8(x,y)=x \vee y \\ f_9(x,y)=\neg(x \vee y) & f_{13}(x,y)=\neg x=g_2(x) \\ f_{10}(x,y)=x \sim y & f_{14}(x,y)=x \rightarrow y \\ f_{11}(x,y)=\neg y=g_2(y) & f_{15}(x,y)=\neg(x \& y) \\ f_{12}(x,y)=y \rightarrow x & f_{16}(x,y)=1=g_4(1) \end{array}$$

$n = 3$ существует 256 различных логических функций и т.д.

Существуют три вида представления логических функций: *аналитический (формула), табличный и в виде функциональной схемы* и две канонические формы представления: *нормальная и совершенная*. Классы совершенных форм: *совершенная дизъюнктивная нормальная форма (СДНФ), совершенная конъюнктивная нормальная форма (СКНФ) и совершенная полиномиальная нормальная форма (СПНФ).*

Механизм построения СДНФ:

1. постройте таблицу истинности логической функции;

2. отметить наборы переменных, на которых логическая функция истинна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией конъюнкции, а между наборами – дизъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется с отрицанием, а если истинное значение, то без отрицания;
4. упростите полученную формулу.

Механизм построения СКНФ:

1. постройте таблицу истинности логической функции;
2. отметьте наборы переменных, на которых логическая функция ложна;
3. выпишите отмеченные наборы переменных, соединяя между собой операцией дизъюнкции, а между наборами – конъюнкцией. Причем, если переменная имеет ложное значение, то она берется без отрицания, а если истинное значение, то с отрицанием;
4. упростите _____ полученную _____ формулу.

Механизм построения СПНФ заключается в замене:

$$a \vee b = a + b + ab, \quad \neg a = 1 + a \text{ из СДНФ.}$$

Результат вычисления булевой функции может быть использован в качестве одного из аргументов другой функции. Итог такой операции - *суперпозиции* можно рассматривать как новую булеву функцию со своей таблицей истинности.

Система булевых функций $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$ называется *полной*, если произвольная булева функция может быть выражена через функции f_1, f_2, \dots, f_n . Полной является система функций $\{\neg, \&, \vee\}$.

Теорема о полноте. Если даны две системы логических функций $F1$, $F2$ и $F1$ полна, то система $F2$ полна тогда, когда каждая функция системы $F1$ представима через функции $F2$.

Примеры выполнения заданий

1. Найдите суперпозицию функций для формулы: $B \sim (A \vee B) \rightarrow A$
Решение: определим порядок выполнения операций и запишем их с помощью элементарных функций от одной или двух переменных:
 $g_3(\sigma)=B$;

$$g_3(a)=A;$$

$$f_9(a, b)=\neg(A \vee B);$$

$$f_{12}(a, b)=\neg(A \vee B) \rightarrow A$$

Получаем: $f_{10}(g_3(b), f_{12}(f_9(a, b), g_3(a)))$.

2. Постройте канонические формы для функции $\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$.

| a | b | $\bar{a} \& b$ | $\bar{a} \& b \oplus \bar{b}$ |
|-----|-----|----------------|-------------------------------|
| 0 | 0 | 1 0 0 | 0 1 1 |
| 0 | 1 | 1 1 1 | 1 1 0 |
| 1 | 0 | 0 0 0 | 0 1 1 |
| 1 | 1 | 0 0 1 | 0 0 0 |

$$\begin{aligned} \text{СДНФ} &= \bar{a} \& \bar{b} \vee \bar{a} \& b \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& (\bar{b} \vee b) \vee a \& \bar{b} \equiv \bar{a} \& 1 \vee a \& \bar{b} \equiv \\ &\equiv \bar{a} \vee a \& \bar{b} \equiv (\bar{a} \vee a) \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv 1 \& (\bar{a} \vee \bar{b}) \equiv \bar{a} \vee \bar{b}. \end{aligned}$$

$$\text{СКНФ} = \bar{a} \vee \bar{b}.$$

$$\text{СПНФ} = \bar{a} \vee \bar{b} = (1 + a) + (1 + b).$$

3. С помощью теоремы о полноте установите полноту алгебры Жегалкина $\{\oplus, 1, *\}$:

Решение: представим функции алгебры логики через алгебру Жегалкина. Для этого воспользуемся дизъюнктивной формой:

$$a \oplus b = a \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot b;$$

$$a = 0 + \bar{a} = 0 \cdot a + 1 \cdot \bar{a} = a \oplus 1;$$

$$a + b = \overline{\bar{a} \cdot \bar{b}} = ((\bar{a} \oplus 1)(\bar{b} \oplus 1)) \oplus 1.$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Найдите суперпозицию функций для формул:

0) $A \& B \rightarrow B \vee A \downarrow \neg B$

1) $\neg B \oplus A \& B \rightarrow A / B$

2) $\neg(A \& B) \downarrow \neg A \vee B \downarrow A$

3) $\neg(A \vee B \& A \sim B \downarrow A)$

4) $B \& \neg A \vee \neg B \oplus A / B$

5) $A \sim B / \neg A \oplus B \rightarrow A$

6) $B \vee A \downarrow B \oplus \neg A \& B$

7) $\neg(B \& A \vee \neg B) \rightarrow A \downarrow B$

8) $A \& B \oplus \neg(A \vee B) \downarrow A$

9) $B \sim A \oplus B \& A / \neg B$

2. Постройте канонические формы для функций:

0) $\bar{a} \oplus b \oplus \bar{c};$

5) $(\overline{b \& c \vee a}) \& \bar{a};$

1) $(a \vee \bar{b}) \& (b \vee \bar{a});$

6) $\overline{b \& a} \oplus \bar{a};$

2) $(a \rightarrow \bar{b}) \rightarrow c;$

7) $a \& b \vee \bar{b} \rightarrow c;$

3) $a \& b \vee \bar{a} \& \bar{b};$

8) $(a \oplus b) \& \bar{c};$

4) $(a \rightarrow b) \rightarrow (a \rightarrow c);$

9) $(\bar{a} \rightarrow \bar{b}) \oplus c;$

| <i>a</i> | <i>b</i> | <i>c</i> | | | |
|----------|----------|----------|--|--|--|
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |
| | | | | | |

СДНФ =

СКНФ =

СПНФ=

3. С помощью теоремы о полноте установите полноту системы:

- | | |
|--------------------------------|-------------------------------|
| 0) $\{\oplus, 1\};$ | 5) $\{\rightarrow, 1\};$ |
| 1) $\{\neg, \rightarrow, 1\};$ | 6) <i>стрелка Пирса;</i> |
| 2) $\{\rightarrow, \oplus\};$ | 7) $\{\oplus, 1\};$ |
| 3) $\{\rightarrow, 0\};$ | 8) $\{\rightarrow, 0\};$ |
| 4) <i>штрих Шеффера;</i> | 9) $\{\rightarrow, \oplus\};$ |

4. Булевская функция $f(x, y, z)$ задана таблично. Представьте эту же функцию формулой логики и функциональной схемой:

| Переменные | | | Варианты задания функции $f(x, y, z)$ | | | | | | | | | |
|------------|-----|-----|---------------------------------------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| x | y | z | 0) | 1) | 2) | 3) | 4) | 5) | 6) | 7) | 8) | 9) |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 |

Практическое занятие №9. Применение алгебры логики

Цель работы:

1. изучить способы минимизации булевых функций в классе ДНФ;
2. получить навыки в применении булевых функций для анализа и синтеза дискретных устройств и релейно-контактных схем. Упрощение и преобразование схем.

1. Минимизация логических функций

Методы минимизации булевых функций:

Метод Квайна.

Метод Квайна - МакКласски.

Метод Блейка - Порецкого.

Метод диаграмм Вейча.

Метод минимизирующих карт.

Метод Петрика.

Минимизация частично определенных булевых функций.

Минимизация систем булевых функций.

Одним из методов построения минимальной ДНФ логической функции является метод Квайна - МакКласски. Формализация производится следующим образом:

1. Все наборы единицы из СДНФ булевой функции f записываются их двоичными номерами.

2. Все номера разбиваются на непересекающиеся группы. Признаком образования i -й группы: i единиц в каждом двоичном номере наборы единицы.

3. Склеивание производят только между номерами соседних групп. Склеиваемые номера отмечаются каким-либо знаком (зачеркиванием).

4. Производят всевозможные склеивания. Неотмеченные после склеивания номера являются простыми *импликантами*.

Нахождение минимальных ДНФ далее производится по импликантной матрице.

Примеры выполнения заданий

1. Минимизируйте методом Квайна - МакКласки булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданную таблицей истинности:

В СДНФ функции $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заменим все наборы единицы их двоичными номерами:

$$f = 0001 \vee 0011 \vee 0101 \vee 0111 \vee 1110 \vee 1111.$$

Образуем группы двоичных номеров. Признаком образования i -й группы является i единиц в двоичном номере наборов единицы.

| Номер группы | Двоичные номера наборов единицы |
|--------------|---------------------------------|
| 0 | - |
| 1 | 0001 |
| 2 | 0011, 0101 |
| 3 | 0111, 1110 |
| 4 | 1111 |

| $x_4 x_3 x_2 x_1$ | f |
|-------------------|-----|
| 0000 | 0 |
| 0001 | 1 |
| 0010 | 0 |
| 0011 | 1 |
| 0100 | 0 |
| 0101 | 1 |
| 0110 | 0 |
| 0111 | 1 |
| 1000 | 0 |
| 1001 | 0 |
| 1010 | 0 |
| 1011 | 0 |
| 1100 | 0 |
| 1101 | 0 |
| 1110 | 1 |
| 1111 | 1 |

Склеим номера из соседних групп таблицы. Склеиваемые номера вычеркнем (прим. - выделено цветом). Результаты склеивания занесем в следующую таблицу.

Склеим номера из соседних групп. Склеиваться могут только номера, имеющие звездочки в одинаковых позициях. Склеиваемые номера вычеркнем. Результаты склеивания занесем в таблицу:

| Номер группы | Двоичные номера наборов единицы |
|--------------|---------------------------------|
| 1 | 00*1, 0*01 |
| 2 | 0*11, 01*1 |
| 3 | *111, 111* |

Имеем три простые импликанты: *111, 111*, 0**1. Строим импликантную матрицу. По таблице определяем совокупность простых импликант - 0**1 и 111*, соответствующую минимальной ДНФ. Для восстановления буквенного вида простой импликанты достаточно

выписать произведения тех переменных, которые соответствуют сохранившимся двоичным цифрам.

| Простые импликанты | Наборы единицы | | | | | |
|-----------------------|----------------|------|------|------|------|------|
| | 0001 | 0011 | 0101 | 0111 | 1110 | 1111 |
| $0**1$ | X | X | X | X | | |
| $*111$ | | | | X | | X |
| $111*$ | | | | | X | X |

$0**1 \rightarrow \overline{x_1} x_4$; $111* \rightarrow x_1 x_2 x_3$. Итак, МДНФ = $\overline{x_1} x_4 \vee x_1 x_2 x_3$

2. Применение булевых функций для анализа и синтеза дискретных устройств. Упрощение и преобразование комбинационных схем

Преобразование информации в блоках ПК производится логическими устройствами двух типов: комбинационными схемами и цифровыми автоматами с памятью.

Логический элемент **И** (*конъюнктор*) реализует операцию логического умножения (см. рис. 1). Логический элемент **ИЛИ** (*дизъюнктор*) реализует операцию логического сложения (см. рис. 2). Логический элемент **НЕ** (*инвертор*) реализует операцию отрицания (см. рис. 3). Логический элемент **И-НЕ** реализует функцию штрих Шеффера (см. рис. 4). Логический элемент **ИЛИ-НЕ** реализует функцию стрелка Пирса (см. рис. 5).

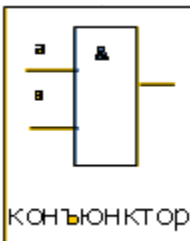


Рис.1



Рис.2



Рис.3

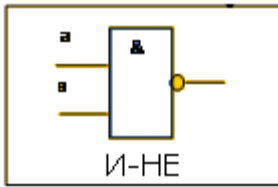


Рис.4

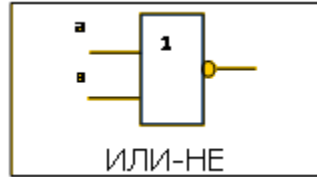
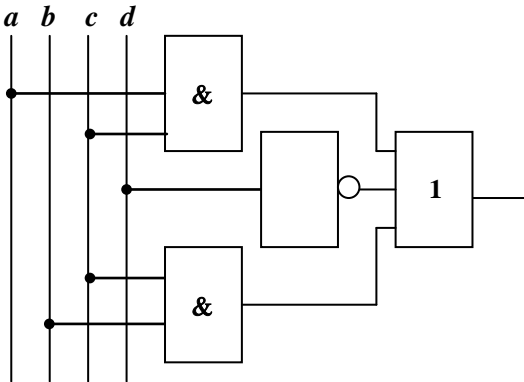


Рис.5

Примеры выполнения заданий

1. Укажите функцию $F(a, b, c, d)$, реализуемую схемой из функциональных элементов предварительно упростив:



Решение: $F(a, b, c, d) = a \& c \vee \bar{d} \vee c \& b \equiv c \& (a \vee b) \vee \bar{d}$.

3. Применение булевых функций для анализа и синтеза релейно-контактных схем. Упрощение и преобразование релейно-контактных схем.

В компьютерах и других автоматических устройствах широко применяются электрические схемы, содержащие сотни и тысячи переключательных элементов: реле, выключателей и т.п. Разработка таких схем весьма трудоёмкое дело. Оказалось, что для разработки и упрощения схем с успехом может быть использован аппарат алгебры логики.


Переключательной схемой считают участок электрической цепи, включающий ряд переключателей. Каждый переключатель имеет только два состояния: замкнутое и разомкнутое. Переключателю поставим в соответствие логическую переменную x , которая при-

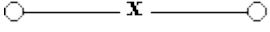
нимает значение **И** в том и только в том случае, когда переключатель замкнут и схема проводит ток; если же переключатель разомкнут, то значение **х** будет **Л**. Будем считать, что переменные **х** и \bar{x} связаны таким образом, что когда контакт **х** замкнут, то \bar{x} разомкнут, и наоборот.

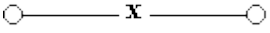
Всей переключательной схеме можно поставить в соответствие логическую переменную, равную **И**, если схема проводит ток, и равную **Л** - если не проводит. Эта переменная является функцией от переменных, соответствующих всем переключателям схемы, и называется **функцией проводимости**.

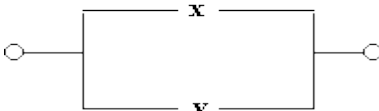
Найдем функции проводимости **F** некоторых переключательных схем:

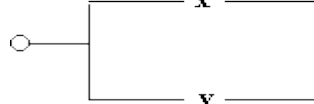
а)  - схема не содержит переключателей и проводит ток всегда, следовательно **F = И**;

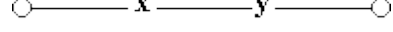
б)  - схема содержит один постоянно разомкнутый контакт, следовательно **F = Л**;

в)  - схема проводит ток, когда переключатель **х** замкнут, и не проводит, когда **х** разомкнут, следовательно, **F(x) = x**;

г)  - схема проводит ток, когда переключатель **х** разомкнут, и не проводит, когда **х** замкнут, следовательно, **F(x) = \bar{x}** ;



д)  - схема проводит ток, когда хотя бы один из переключателей замкнут (*параллельное соединение*), следовательно, **F(x, y) = $x \vee y$** .

е)  - схема проводит ток, когда оба переключателя замкнуты (*последовательное соединение*), следовательно, **F(x, y) = $x \& y$** ;

При рассмотрении переключательных схем возникают две основные задачи: **синтез и анализ схемы**.

Синтез схемы по заданным условиям ее работы сводится к:

1. составлению функции проводимости по таблице истинности, отражающей эти условия;

2. упрощению этой функции;
3. построению соответствующей схемы.

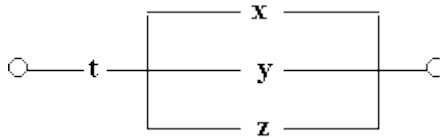
Анализ схемы сводится к:

1. определению значений её функции проводимости при всех возможных наборах входящих в эту функцию переменных.
2. получению упрощённой формулы.

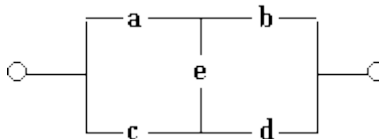
Примеры выполнения заданий:

1. Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, содержащую 4 переключателя x , y , z и t , такую, чтобы она проводила ток тогда и только тогда, когда замкнут контакт переключателя t и какой-нибудь из остальных трёх контактов.

Функция имеет вид: $F(x, y, z, t) = t \& (x \vee y \vee z)$. Схема имеет вид:

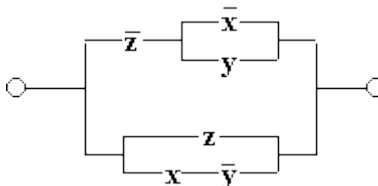


2. Требуется произвести анализ схемы:



Имеется четыре возможных пути прохождения тока при замкнутых переключателях a , b , c , d , e : через переключатели a , b ; через переключатели a , e , d ; через переключатели c , d и через переключатели c , e , b . Функция проводимости имеет вид: $F(a, b, c, d, e) = a \& b \vee a \& e \& d \vee c \& d \vee c \& e \& b$ или $F(a, b, c, d, e) = a \& (b \vee e \& d) \vee c \& (d \vee e \& b)$.

3. Требуется произвести анализ и, если возможно, упрощение схемы. Постройте упрощенную схему.



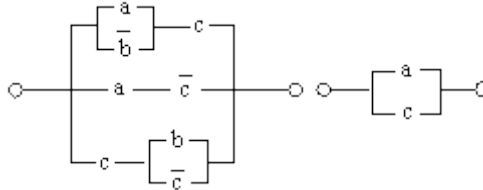
Функция проводимости имеет вид: $F(x, y, z) = \bar{z} \& (\bar{x} \vee y) \vee (z \vee x \& \bar{y})$

$$\begin{aligned}
 F(x, y, z) &= \bar{z} \& \bar{x} \vee \bar{z} \& y \vee z \vee x \& \bar{y} \equiv \\
 &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee (\bar{z} \vee z) \& (y \vee z) \vee x \& \bar{y} \equiv \\
 &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee I \& (y \vee z) \vee x \& \bar{y} \equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee y \vee z \vee x \& \bar{y} \equiv \\
 &\equiv \bar{z} \& \bar{x} \vee z \vee x \& \bar{y} \vee y \equiv (\bar{z} \vee z) \& (\bar{x} \vee z) \vee (x \vee y) \& (\bar{y} \vee y) \equiv \\
 &\equiv I \& (\bar{x} \vee z) \vee (x \vee y) \& I \equiv \bar{x} \vee z \vee x \vee y \equiv I \vee y \vee z \equiv I
 \end{aligned}$$

Упрощенная схема имеет вид:



4. Проверьте равносильность следующих переключательных схем:



Функция проводимости имеет вид:

$$F(a, b, c) = (a \vee \bar{b}) \& c \vee a \& \bar{c} \vee c \& (b \vee \bar{c}).$$

$$\begin{aligned}
 F(a, b, c) &= a \& c \vee \bar{b} \& c \vee a \& \bar{c} \vee c \& b \vee c \& \bar{c} \equiv \\
 &\equiv a \& (c \vee \bar{c}) \vee c \& (\bar{b} \vee b) \vee \bar{c} \& c \equiv a \& I \vee c \& I \equiv a \vee c
 \end{aligned}$$

Переключательные схемы равносильны.

Задания для самостоятельного выполнения

1. Минимизируйте методом Квайна - МакКласки булеву функцию $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$, заданную таблицей истинности:

| $x_4 x_3 x_2 x_1$ | f_0 | f_1 | f_2 | f_3 | f_4 | f_5 | f_6 | f_7 | f_8 | f_9 |
|-------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 0000 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0001 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0010 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0011 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0100 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 0101 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0110 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0111 | 1 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |

| | | | | | | | | | | |
|------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1000 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1001 | 1 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1010 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1011 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 1100 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1101 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1110 | 0 | 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1111 | 0 | 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 1 |

Решение:

| <i>Номер группы</i> | <i>Двоичные номера наборов единицы</i> | <i>Номер группы</i> | <i>Двоичные номера наборов единицы</i> |
|---------------------|--|---------------------|--|
| 0 | | | |
| 1 | | | |
| 2 | | | |
| 3 | | | |
| 4 | | | |

| |
|--|
| |
|--|

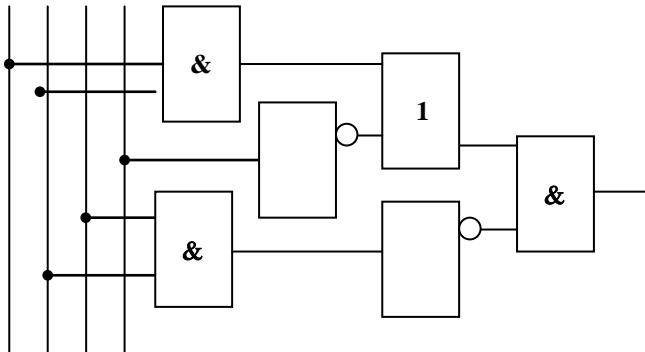
| Простые импликанты | Наборы единицы | | | | | | | |
|-----------------------|----------------|--|--|--|--|--|--|--|
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |
| | | | | | | | | |

МДНФ=

2. Укажите функцию $F(x1, x2, x3, x4)$, реализуемую схемой из функциональных элементов:

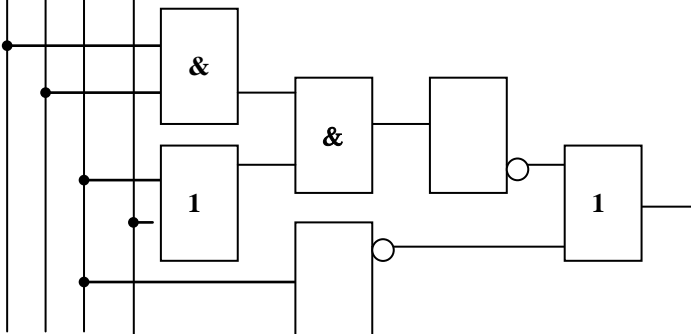
0) $F(x1, x2, x3, x4) =$

$x1 \ x2 \ x3 \ x4$

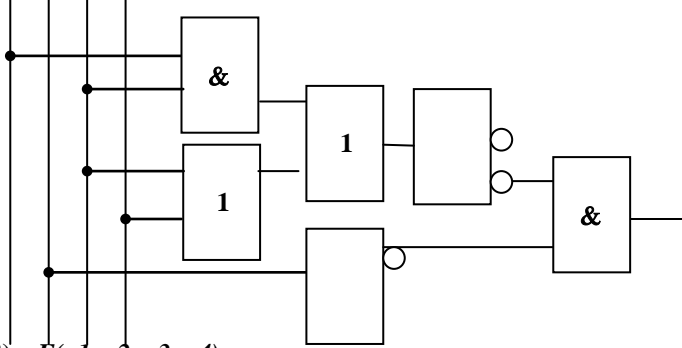


1) $F(x1, x2, x3, x4) =$

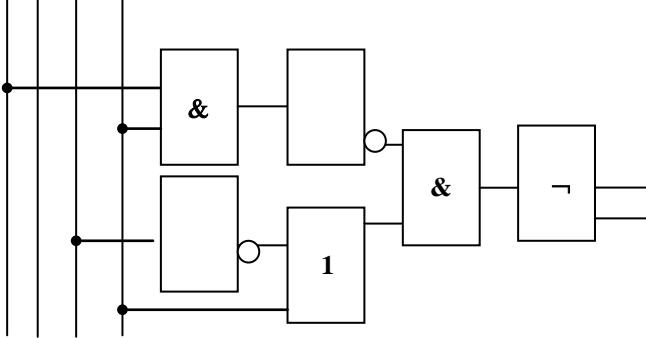
$x1 \ x2 \ x3 \ x4$



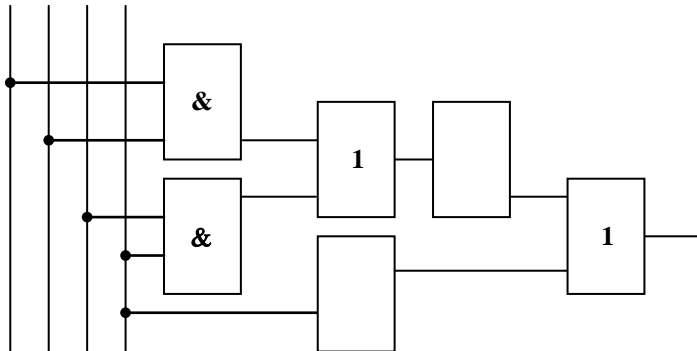
2) $F(x1, x2, x3, x4) =$
 $x1 \ x2 \ x3 \ x4$



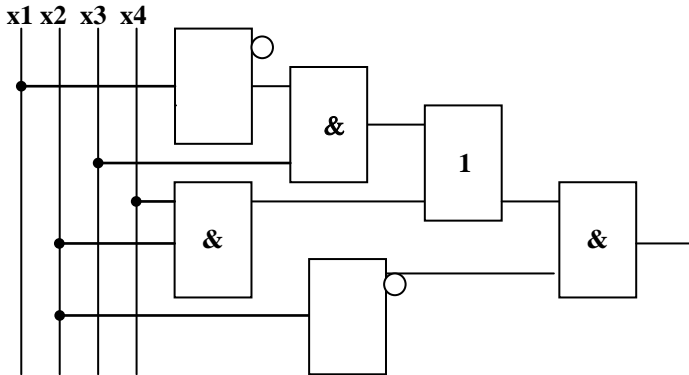
3) $F(x1, x2, x3, x4) =$
 $x1 \ x2 \ x3 \ x4$



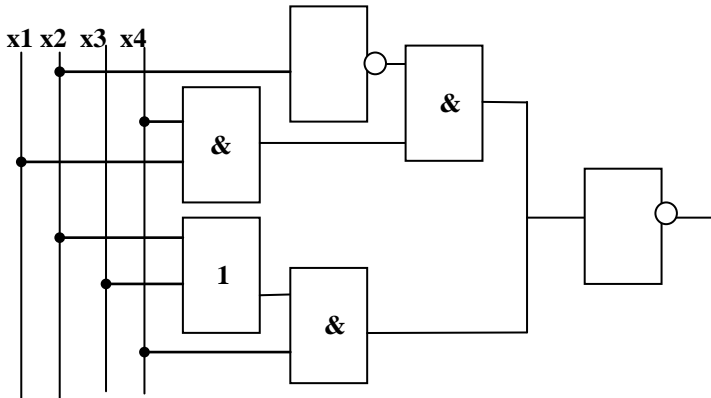
4) $F(x1, x2, x3, x4) =$
 $x1 \ x2 \ x3 \ x4$



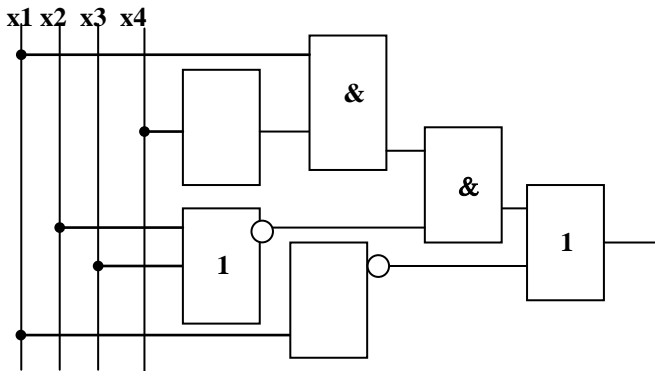
5) $F(x1, x2, x3, x4) =$



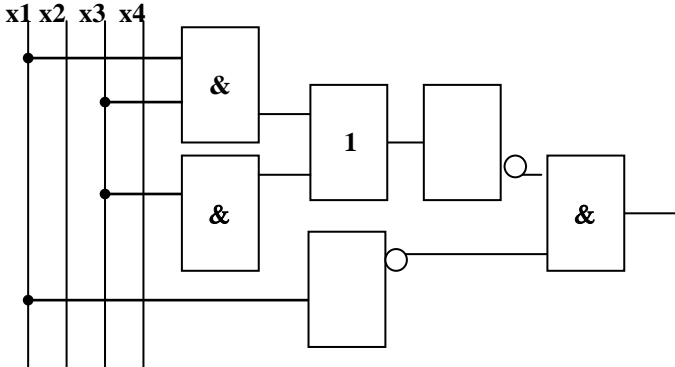
6) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$



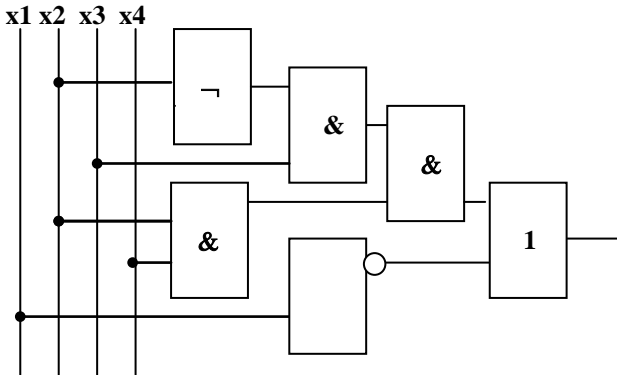
7) $F(x_1, x_2, x_3, x_4) =$



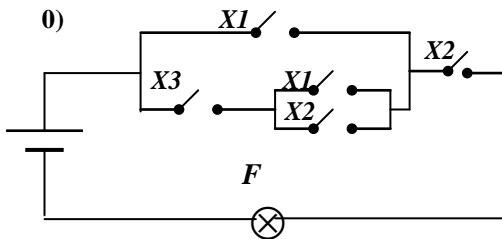
8) $F(x1, x2, x3, x4) =$



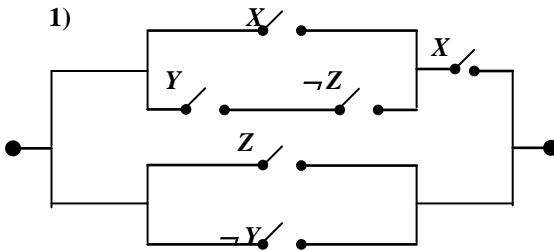
9) $F(x1, x2, x3, x4) =$



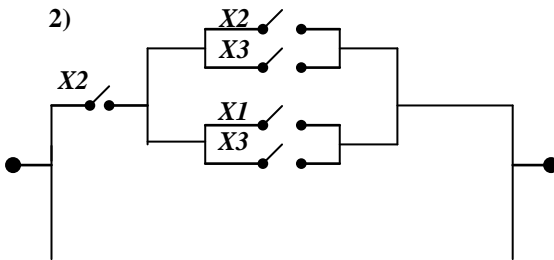
3. Требуется произвести анализ и, если возможно, упрощение переключательных схем, приведенных на следующих рисунках:



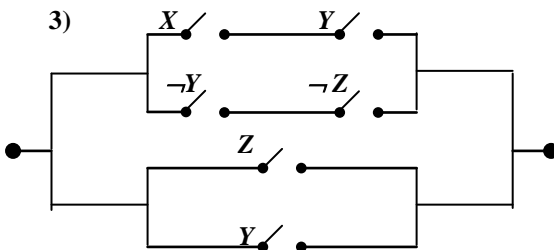
Решение:



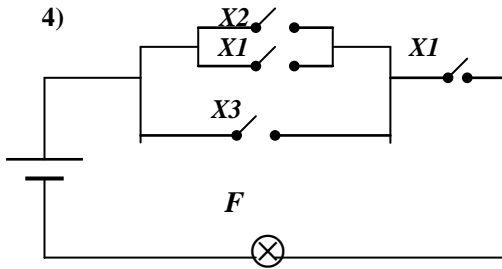
Решение:



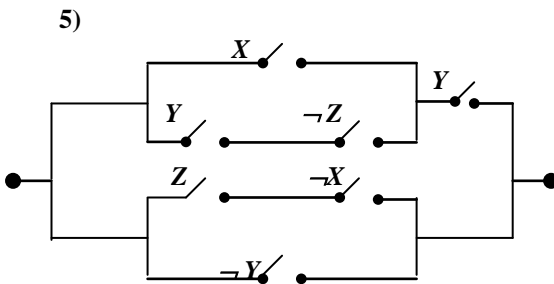
Решение:



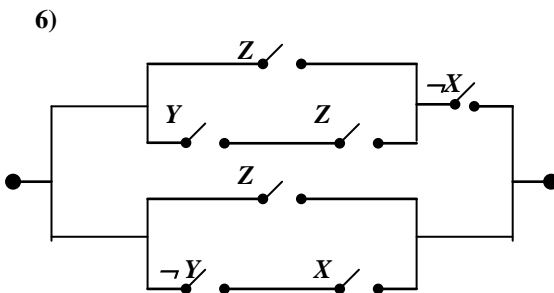
Решение:



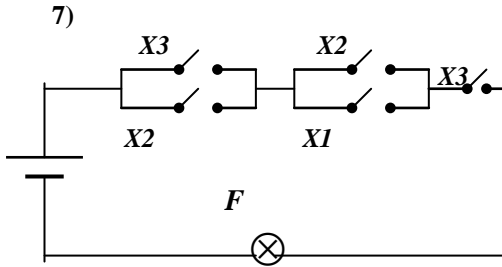
Решение:



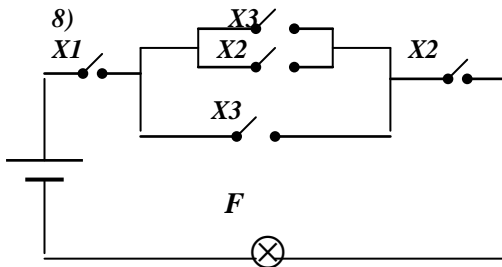
Решение:



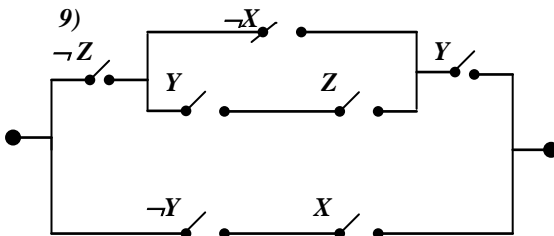
Решение:



Решение:



Решение:



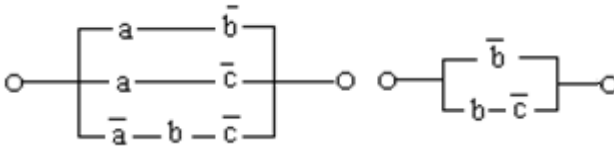
Решение:

Практическое занятие №10. Применение алгебры логики

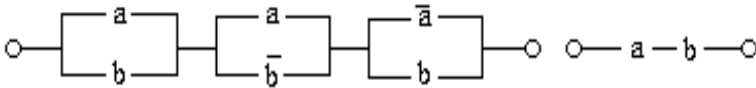
Задания для самостоятельного выполнения

1. Проверьте равносильность следующих переключательных схем:

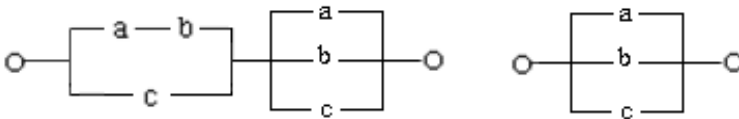
0)



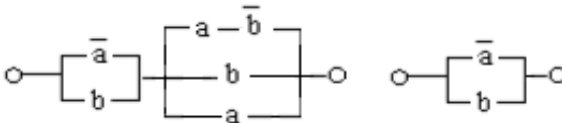
1)



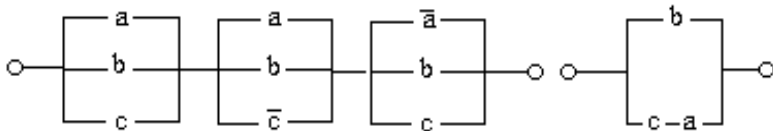
2)



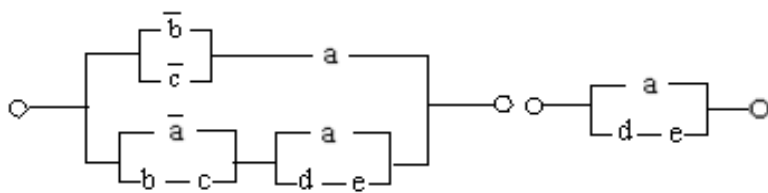
3)



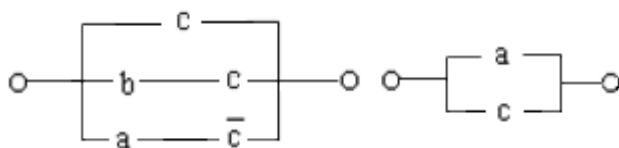
4)



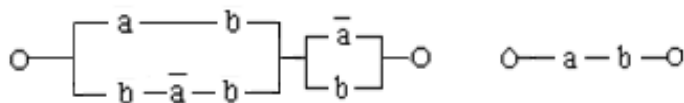
5)



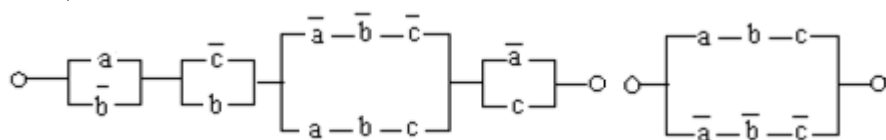
6)



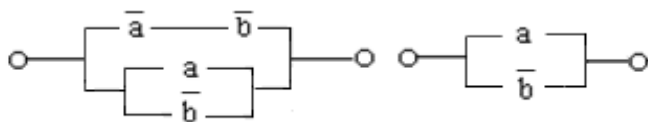
7)



8)



9)



2. Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, с 5-ю переключателями, которая проводит ток в том и только в том случае, когда замкнуты ровно 4 переключателя.

3. Необходимо спроектировать (синтезировать) электрическую цепь, чтобы в спортзале можно было включать и выключать свет при помощи любого из 3-х выключателей.

Контрольные вопросы

на тему: «Логические основы информатики»

| | |
|----------|--|
| А | Как построить функциональную схему? |
| Б | Какими свойствами обладает операция импликации? |
| В | Укажите приоритет выполнения логических операций. |
| Г | Что такое алгебра логики? Что такое логическая формула? |
| Д | Какие формы представления булевой функции Вы знаете? |
| Е | Какая связь между алгеброй логики и двоичным кодированием? |
| Ё | Что является предметом исследования алгебры логики? |
| Ж | Какие логические операции Вы знаете? |
| З | Какие основные законы выполняются в алгебре логики? |
| И | Какими свойствами обладают логические константы? |
| Й | Почему для построения функциональных схем используются только операции конъюнкции, дизъюнкции и отрицания? |
| К | Какие методы построения МДНФ Вы знаете? |
| Л | Какие значения принимают логические переменные? |

| | |
|----------|---|
| М | <i>Что используется в качестве логических связей?</i> |
| Н | <i>Какие законы алгебры логики справедливы и в математике?</i> |
| О | <i>Что такое импликанты?</i> |
| П | <i>Как построить СКНФ функции?</i> |
| Р | <i>Какую роль в ПК играет двоичный сумматор?</i> |
| С | <i>Что такое таблица истинности?</i> |
| Т | <i>Какими свойствами обладает операция эквиваленции?</i> |
| У | <i>Каковы области определения и значения логических функций?</i> |
| Ф | <i>Что такое логическая функция?</i> |
| Х | <i>Как построить МДНФ функции?</i> |
| Ц | <i>Какими свойствами обладает операция дизъюнкции?</i> |
| Ч | <i>В каком виде может представляться логическая функция?</i> |
| Ш | <i>Как построить СДНФ функции?</i> |
| Щ | <i>Какими свойствами обладает операция конъюнкции?</i> |
| Ъ | <i>Какие равносильности алгебры логики Вы знаете?</i> |
| Ы | <i>Как соотносятся СДНФ и СКНФ функции?</i> |
| Ь | <i>Что такое высказывание? Какие виды высказываний Вы знаете?</i> |
| Э | <i>Как задаются логические операции?</i> |
| Ю | <i>Для чего строится СДНФ функции?</i> |
| Я | <i>Какими свойствами обладает операция строгой дизъюнкции?</i> |

Глава 3. Элементы логики предикатов

Практическое занятие №11. Понятие предиката.

Предикатом n -арности n (n -арным, или n -местным предикатом) называют функцию от n переменных $Q(x_1, x_2, \dots, x_n)$, определенную на декартовом произведении множеств: $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ и принимающую значения из множества $\{И, Л\}$.

Примеры выполнения заданий

1. Постройте матрицу одноместного предиката $P(x)$, если:

$P(x) = "x \text{ кратно } 2", \text{ где } x \in [1, 14]$

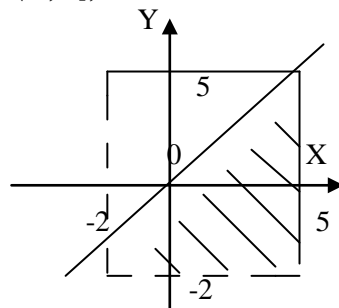
| | | | | | | | | | | | | | |
|--------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|----|----|----|----|
| x | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 |
| $P(x)$ | Л | И | Л | И | Л | И | Л | И | Л | И | Л | И | Л |

2. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката $P(x, y) = 1/4x \geq 1/4y$, если $x, y \in (-2, 5]$;

Построим график прямой:

$$1/4y = 1/4x; \quad y = x;$$

| | |
|-----|-----|
| x | y |
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |



Проверим точку выше графика прямой, например, с координатами $(-1; 2)$.

Подставим координаты в неравенство:

$1/4(-1) \geq 1/4(2)$ – это ложно, поэтому

область истинности предиката расположена ниже прямой, включая ее точки (т.к. нестрогое неравенство).

Задания для самостоятельного выполнения

1. Постройте матрицу одноместного предиката $Q(x)$, если:

| | |
|--|---|
| 0) $Q(x) = "2x^2 \text{ кратно } 5", x \in (-8, 13);$ | 1) $Q(x) = "3x^2 \text{ кратно } 2", x \in [-5, 13];$ |
| 2) $Q(x) = "4x^2 \text{ кратно } 5", x \in (-10, 11);$ | 3) $Q(x) = "3x^3 \text{ кратно } 2", x \in [-9, 10];$ |
| 4) $Q(x) = "5x^2 \text{ кратно } 3", x \in (-5, 13];$ | 5) $Q(x) = "3x^3 \text{ кратно } 4", x \in (-7, 12);$ |
| 6) $Q(x) = "5x^3 \text{ кратно } 4", x \in [-6, 14];$ | 7) $Q(x) = "x^4 \text{ кратно } 2", x \in (-11, 1];$ |

| | |
|--|--|
| 8) $Q(x) = "x^3 \text{ кратно } 5", x \in (-9, 10);$ | 9) $Q(x) = "x^2 \text{ кратно } 3", x \in [-7, 12);$ |
|--|--|

| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
|------|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|--|
| x | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |
| Q(x) | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

2. Изобразите геометрически множество истинности одно-местных предикатов $G(x)$ и $P(x)$, если:

0) $G(x) = "8 \geq -2x > 4/3";$

$P(x) = "2 > 1/5x \geq -5";$

1) $G(x) = "-9 < -3x \leq 3/2";$

$P(x) = "12 > 3/4x > -3";$

2) $G(x) = "0 \geq 1/3x > -5/9";$

$P(x) = "-14 \leq -7x \leq 1/4";$

3) $G(x) = "1/4 < -3x \leq 9";$

$P(x) = "1 \geq 1/6x > -1/2";$

4) $G(x) = "1/3 > -6x > -6";$

$P(x) = "5 \geq 1/2x \geq -1/4";$

5) $G(x) = "8 \geq -2x > 4/3";$

$P(x) = "1/10 > 1/5x > -5";$

6) $G(x) = "-1 < -3x \leq 3/2";$

$P(x) = "6 > 1/4x > -3";$

7) $G(x) = "0 \geq 1/2x > -3/4";$

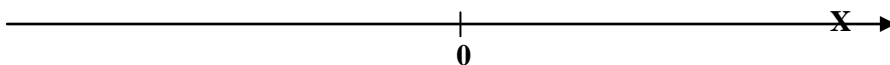
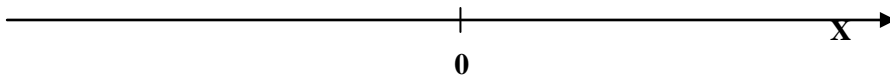
$P(x) = "-1 \leq -7x \leq 1/2";$

8) $G(x) = "1/5 < -3x \leq 9";$

$P(x) = "1 \geq 1/6x > -1/2";$

9) $G(x) = "1/8 > -4x > -8";$

$P(x) = "2 \geq 1/2x \geq -1/4";$



3. Изобразите геометрически множество истинности предиката $P(x)$, решив систему неравенств:

0) $P(x) = \begin{cases} x + 5 \leq 3x + 7 \\ \frac{2x-2}{3} \leq \frac{x+1}{2} \end{cases}$

1) $P(x) = \begin{cases} 2x - 11 \leq 5x - 8 \\ \frac{x}{-2} \geq \frac{x}{-3} \end{cases}$

2) $P(x) = \begin{cases} x + 4 \leq 4x - 5 \\ -2x + 1 \geq 7x - 35 \end{cases}$

3) $P(x) = \begin{cases} 5 - 2x > 3 - x \\ 6 + 4x < 8 + x \end{cases}$

4) $P(x) = \begin{cases} 8(3 - x) + 2x > 0 \\ \frac{x}{4} - \frac{x}{2} < 1 \end{cases}$

5) $P(x) = \begin{cases} \frac{x-4}{6} < \frac{2x}{3} \\ x - \frac{x-1}{4} < 0 \end{cases}$

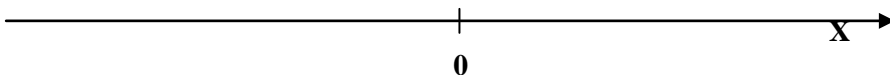
$$6) P(x) = \begin{cases} 2x - \frac{x+4}{4} < 2 \\ \frac{3-x}{2} - x < 3x \end{cases}$$

7)

$$P(x) = \begin{cases} 9(x+3) < 5(x+1) + 6(x+2) \\ 2(x-18) < 7x - 3(2x+3) \end{cases}$$

$$8) P(x) = \begin{cases} 14 - 3x < 1 - x \\ 1 + 7x > 2 + 6x \end{cases}$$

$$9) P(x) = \begin{cases} 6(2-x) - 3(4x+1) > 0 \\ -2(6x-1) > 2 \end{cases}$$



4. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката $A(x, y)$.

0) $A(x, y) = "1/3x > 9y"$,

если $x, y \in (-2, 13]$;

2) $A(x, y) = "-1/4x \leq 2y"$,

если $x, y \in [-4, 9]$;

4) $A(x, y) = "5x > 1/2y"$,

если $x, y \in [-12, 3]$;

5) $A(x, y) = "-1/10x \leq 5y"$,

если $x, y \in (-1, 15]$;

6) $A(x, y) = "3x \leq 5/3y"$,

если $x, y \in [-9, 4]$;

7) $A(x, y) = "-3x < 2y"$,

если $x, y \in [-10, 5]$;

8) $A(x, y) = "1/6x > -12y"$,

если $x, y \in [-1, 14]$;

9) $A(x, y) = "-4x \leq 2/3y"$,

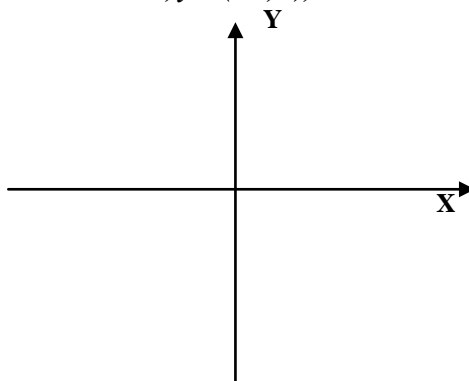
если $x, y \in [-8, 6]$;

1) $A(x, y) = "3x > -1/2y"$,

если $x, y \in (-5, 11]$;

3) $A(x, y) = "10x \leq 1/2y"$,

если $x, y \in (-10, 5]$;



5. Изобразите геометрически множество истинности двуместного предиката $Q(x, y)$.

0) $Q(x, y) = "1/4x^2 < 2y"$, если $x, y \in (-1, 6)$;

1) $Q(x, y) = "-4x^2 < 2y"$, если $x, y \in (-4, 8]$;

2) $Q(x, y) = "-6x^2 \leq 3y"$, если $x, y \in [-2, 7]$;

3) $Q(x, y) = "-5x^2 \leq 2y"$, если $x, y \in [-3, 7]$;

4) $Q(x, y) = "3x^2 < -2y"$, если $x, y \in (-2, 6)$;

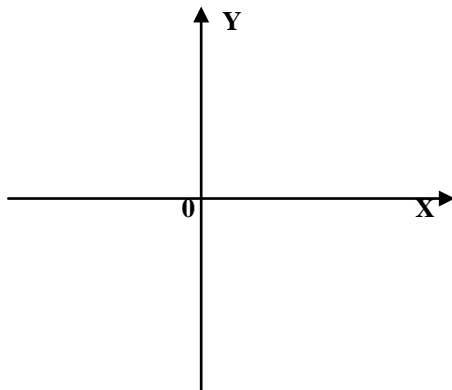
5) $Q(x, y) = "-6x^2 > 3y"$, если $x, y \in (-4, 5]$;

6) $Q(x, y) = "7x^2 \leq -3y"$, если $x, y \in [-4, 5]$;

7) $Q(x, y) = "-4x > 1/2y"$, если $x, y \in (-7, 1)$;

8) $Q(x, y) = "6x^2 > -5y"$, если $x, y \in [-3, 4]$;

9) $Q(x, y) = "8x^2 \leq 1/6y"$, если $x, y \in [-3, 8]$;



Практическое занятие №12. Операции над предикатами и кванторами.

Все логические операции логики высказываний справедливы и для предикатов (отрицание, конъюнкция, дизъюнкция, импликация и эквиваленция). *Квантор* — общее название для логических операций, ограничивающих область истинности какого-либо предиката. В математической логике приписывание квантора к формуле называется *связыванием*, а переменную, к которой он относится, называют *связанной* иначе *свободной*. Например, в предикате $\forall x A(x, y) \vee \forall z B(c, z)$ переменные x и z — связанные, а переменные y и c — свободные.

Чаще всего используют два вида кванторов:

| Название | Прочтение | Обозначение |
|-----------------------|--|-------------|
| Квантор общности | «все», «всякий», «каждый», «любой» | \forall |
| Квантор существования | «существует», «найдется», «хотя бы один» | \exists |

Пусть задан одноместный предикат $P(x)$ на множестве $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, тогда: $\forall x P(x) = P(a_1) \& P(a_2) \& P(a_3) \& P(a_4)$;

$\exists x P(x) = P(a_1) \vee P(a_2) \vee P(a_3) \vee P(a_4)$.

Квантор уменьшает число свободных переменных в логическом выражении и превращает трёхместный предикат в двухместный, двухместный — в одноместный, одноместный — в высказывание.

Примеры выполнения заданий

1. Пусть предикат $Q(x,y)$ определен на конечных множествах:

$X=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Y=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6\}$ и имеет таблицу истинности:

| X | Y | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 |
| a_1 | И | И | Л | Л | И | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | И | И | Л |
| a_3 | И | И | Л | Л | И | И |
| a_4 | Л | И | Л | Л | И | И |
| a_5 | И | И | И | И | И | И |

С помощью кванторов общности и существования постройте высказывания и определите их истинность.

Решение. Результат применения кванторов общности и существования по $x \in X$:

| | Y | | | | | |
|--------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 |
| $\forall x Q(x,y)$ | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| $\exists x Q(x,y)$ | И | И | И | И | И | И |

Результат применения
квантора общности по $y \in Y$:

| X | $\forall y Q(x,y)$ |
|-------|--------------------|
| a_1 | Л |
| a_2 | Л |
| a_3 | Л |
| a_4 | Л |
| a_5 | И |

Результат применения
квантора существования по $y \in Y$:

| X | $\exists y Q(x,y)$ |
|-------|--------------------|
| a_1 | И |
| a_2 | И |
| a_3 | И |
| a_4 | И |
| a_5 | И |

Применив кванторы общности и существования повторно, получим восемь высказываний (0-арных предикатов), представленных в таблице:

| <i>Высказывание</i> | <i>Значение истинности</i> |
|-------------------------------|----------------------------|
| $\forall y \forall x Q(x, y)$ | Л |
| $\exists y \forall x Q(x, y)$ | И |
| $\forall y \exists x Q(x, y)$ | И |
| $\exists x \forall y Q(x, y)$ | И |
| $\forall x \exists y Q(x, y)$ | И |
| $\exists x \exists y Q(x, y)$ | И |

Задания для самостоятельного выполнения

1. Пусть предикат $P(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ и имеет таблицу истинности. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | И | И | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | И | И | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | Л | Л | И | Л | И | И | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | Л | Л | Л | И | И | Л | И | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | Л | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_2 | Л | И | И | Л | Л | Л | Л | И |
| a_3 | И | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И |
| a_4 | Л | И | Л | И | И | Л | Л | И |

| | Y |
|--|----------|
|--|----------|

| X | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | И | И | Л | И | И | Л | Л | И |
| a_2 | Л | Л | И | Л | И | И | И | И |
| a_3 | И | Л | И | Л | И | И | Л | И |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | И | И | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | И | И | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | Л | И | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | И | Л | И | И | Л | Л | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | И | Л | Л | И |
| a_3 | И | И | Л | Л | И | И | Л | И |
| a_4 | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | И | И | И | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | И | И | И | Л |
| a_3 | Л | Л | И | И | И | Л | Л | Л |
| a_4 | И | Л | Л | И | И | И | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | Л | Л | И | Л | И | И | Л |
| a_2 | И | И | Л | Л | Л | И | И | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | И | И | И | Л |
| a_4 | И | И | Л | Л | И | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | И |
| a_2 | И | Л | Л | И | И | Л | И | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | Л | Л | И |

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a_4 | Л | Л | И | И | И | Л | Л | Л |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | И | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_4 | Л | Л | Л | И | И | И | Л | И |

Решение:

| Y | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\forall x P(x, y)$ | | | | | | | | |
| $\exists x P(x, y)$ | | | | | | | | |

| X | $\forall y P(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |
| a_4 | |

| X | $\exists y P(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |
| a_4 | |

2. Предикат $R(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8\}$ и имеет таблицу истинности. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | Л | Л | Л | Л | И | И | И |
| a_2 | И | И | Л | И | И | И | Л | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | И | Л | Л | Л |
| a_4 | Л | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | И | И | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | И | Л | И | Л | Л |
| a_3 | И | И | И | И | Л | И | Л | Л |

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a_4 | Л | Л | И | И | И | И | И | И |
| a_5 | И | Л | Л | И | Л | И | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | Л | И | И | И | И | И | И |
| a_2 | И | Л | Л | И | Л | Л | Л | И |
| a_3 | И | Л | Л | И | Л | Л | Л | И |
| a_4 | И | Л | Л | И | И | Л | Л | И |
| a_5 | И | Л | И | И | И | И | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | И | Л | И | И | Л | Л | И |
| a_2 | Л | Л | И | Л | И | И | И | И |
| a_3 | И | Л | И | Л | И | И | Л | И |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | И |
| a_5 | И | Л | И | Л | Л | Л | И | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | И | Л | Л | Л | Л | И | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | И | Л |
| a_3 | И | И | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | Л | И | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И | И |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | Л | Л | И | И | Л | Л | Л |
| a_2 | Л | И | И | Л | И | Л | Л | И |
| a_3 | Л | И | Л | Л | И | И | Л | Л |
| a_4 | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л |
| a_5 | Л | И | Л | И | Л | Л | И | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|----------|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_2 | Л | И | И | И | И | И | И | Л |

| | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a_3 | Л | И | И | И | И | Л | Л | Л |
| a_4 | И | Л | Л | И | И | И | И | И |
| a_5 | И | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | Л | Л | И | И | И | И | Л |
| a_2 | И | И | Л | Л | Л | И | И | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | И | И | И | Л |
| a_4 | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л |
| a_5 | И | И | И | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_2 | И | Л | И | И | И | Л | И | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | Л | Л | И |
| a_4 | Л | И | И | И | И | И | Л | Л |
| a_5 | И | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | И | И | И | И |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_4 | Л | Л | Л | И | И | И | Л | И |
| a_5 | Л | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |

Решение:

| X | $\forall y R(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |
| a_4 | |
| a_5 | |

| X | $\exists y R(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |
| a_4 | |
| a_5 | |

| Y | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\forall x R(x, y)$ | | | | | | | | |

| | | | | | | | | |
|---------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|
| $\exists x R(x, y)$ | | | | | | | | |
|---------------------|--|--|--|--|--|--|--|--|

3. Предикат $A(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7\}$ и задан таблично. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | И | И |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_5 | Л | И | Л | Л | И | И | Л |
| a_6 | И | И | Л | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | Л | И |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | Л | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | И |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_5 | Л | И | Л | И | И | Л | И |
| a_6 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | Л | И |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | Л | Л |
| a_3 | Л | Л | Л | И | Л | Л | И |
| a_4 | Л | Л | И | И | И | И | И |
| a_5 | Л | И | И | Л | И | И | Л |
| a_6 | Л | И | Л | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |

| | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|
| a_1 | Л | И | Л | И | И | Л | И |
| a_2 | И | И | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | Л | И |
| a_4 | Л | И | Л | Л | И | И | И |
| a_5 | И | И | Л | И | И | И | Л |
| a_6 | Л | И | И | И | Л | И | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_2 | Л | И | Л | И | Л | И | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | Л | Л | Л |
| a_4 | Л | Л | Л | Л | Л | И | И |
| a_5 | И | И | Л | И | И | И | Л |
| a_6 | И | Л | И | Л | И | И | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | И | Л | Л | И | Л | И | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | И | И | Л | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | Л | Л |
| a_4 | Л | Л | Л | Л | И | Л | И |
| a_5 | Л | И | Л | И | И | И | И |
| a_6 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | Л | И |
| a_2 | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | Л | Л |
| a_4 | Л | И | И | Л | Л | Л | И |
| a_5 | Л | Л | Л | И | И | Л | И |
| a_6 | И | И | Л | Л | И | И | И |

| | Y |
|--|---|
|--|---|

| X | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| a_1 | И | Л | Л | И | Л | И | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | И | И | Л | Л |
| a_3 | Л | И | Л | И | И | Л | Л |
| a_4 | Л | Л | Л | Л | И | Л | И |
| a_5 | Л | И | Л | И | И | И | И |
| a_6 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | И | Л | Л | Л | И | И | И |
| a_2 | И | Л | Л | Л | Л | И | И |
| a_3 | И | Л | И | И | Л | И | И |
| a_4 | И | Л | И | И | Л | И | И |
| a_5 | Л | И | И | И | И | И | И |
| a_6 | Л | И | Л | Л | Л | Л | И |

| X | Y | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
| a_1 | Л | Л | Л | И | Л | И | И |
| a_2 | Л | И | Л | Л | И | Л | И |
| a_3 | Л | И | Л | Л | Л | И | Л |
| a_4 | И | Л | Л | Л | И | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | И | И | И |
| a_6 | Л | И | Л | Л | Л | Л | И |

Решение:

| Y | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $\forall x A(x, y)$ | | | | | | | |
| $\exists x A(x, y)$ | | | | | | | |

| X | $\forall y A(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |

| X | $\exists y A(x, y)$ |
|-------|---------------------|
| a_1 | |
| a_2 | |
| a_3 | |

| | |
|-------|--|
| a_4 | |
| a_5 | |
| a_6 | |

| | |
|-------|--|
| a_4 | |
| a_5 | |
| a_6 | |

| Высказывание | Значение истинности |
|-------------------------------|---------------------|
| $\forall x \forall y A(x, y)$ | |
| $\forall x \exists y A(x, y)$ | |
| $\exists x \forall y A(x, y)$ | |
| $\exists x \exists y A(x, y)$ | |
| $\forall y \exists x A(x, y)$ | |
| $\exists y \forall x A(x, y)$ | |

4. Предикат $K(x, y)$ определен на множествах: $X = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6\}$, $Y = \{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6, b_7, b_8, b_9, b_{10}\}$ и задан таблично. С помощью кванторов постройте высказывания и определите их истинность:

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | Л | И | И | И |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | Л | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | Л | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | Л | И | И | Л | Л | И | Л | И | Л | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | И | Л | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | Л | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | Л | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | И | И | И | Л | И | Л | Л | И | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|---|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |

| | | | | | | | | | | |
|-------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | Л | И | Л | Л | Л | Л | Л | Л | И | И |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | И | Л | И |
| a_5 | Л | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | И | И | Л | И | И | И | И | И | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | И | И | И | Л |
| a_3 | И | Л | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | И | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | И | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | Л | И | Л | Л | И | И | И | И | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | Л | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | Л | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | И | И | И | И | Л | И | И | И | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | И | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | И | И | И | И | Л |
| a_3 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | Л | И | И | И | Л | И | И | И | Л |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | Л | Л | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | И | Л | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | Л | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | И | И | Л | И | Л | Л | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | Л | И | И | И | И | Л | И | Л | И | И |

| X | Y | | | | | | | | | |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
| a_1 | И | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_2 | Л | И | И | И | Л | И | И | И | И | И |
| a_3 | И | Л | И | И | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_4 | Л | И | Л | И | Л | И | Л | Л | Л | Л |
| a_5 | И | И | Л | Л | И | И | Л | Л | Л | Л |
| a_6 | И | И | И | Л | И | И | И | И | Л | И |

Решение:

| Y | b_1 | b_2 | b_3 | b_4 | b_5 | b_6 | b_7 | b_8 | b_9 | b_{10} |
|---------------------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $\forall x K(x, y)$ | | | | | | | | | | |
| $\exists x K(x, y)$ | | | | | | | | | | |

| X | $\forall y K(x, y)$ | X | $\exists y K(x, y)$ |
|-------|---------------------|-------|---------------------|
| a_1 | | a_1 | |
| a_2 | | a_2 | |
| a_3 | | a_3 | |
| a_4 | | a_4 | |
| a_5 | | a_5 | |
| a_6 | | a_6 | |

| Высказывание | Значение истинности |
|-------------------------------|---------------------|
| $\forall x \forall y K(x, y)$ | |
| $\forall x \exists y K(x, y)$ | |
| $\exists x \forall y K(x, y)$ | |
| $\exists x \exists y K(x, y)$ | |
| $\forall y \exists x K(x, y)$ | |
| $\exists y \forall x K(x, y)$ | |

Практическое занятие №13. Формулы логики предикатов.

Равносильность формул логики предикатов

Две формулы логики предикатов А и В называются *равносильными*, если они равносильны на всякой области.

Пусть $P(x)$, $Q(x)$ и $U(x, y)$ – переменные предикаты. Тогда имеют место равносильности:

Таблица. Основные равносильности.

| |
|---|
| $\neg \exists x P(x) \equiv \forall x \neg P(x)$ |
| $\neg \forall x P(x) \equiv \exists x \neg P(x)$ |
| $\neg (\forall x P(x) \vee \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \& \forall y \neg Q(y)$ |
| $\neg (\forall x P(x) \& \exists y Q(y)) \equiv \exists x \neg P(x) \vee \forall y \neg Q(y)$ |
| $\neg \neg \forall x P(x) \equiv \forall x P(x)$ |

| |
|---|
| $\neg \neg \exists x P(x) \equiv \exists x P(x)$ |
| $\forall x \forall y U(x, y) \equiv \forall y \forall x U(x, y)$ $\exists x \exists y U(x, y) \equiv \exists y \exists x U(x, y)$ $\forall x \exists y U(x, y) \neq \exists y \forall x U(x, y)$ $\exists x \forall y U(x, y) \Rightarrow \forall y \exists x U(x, y)$ |
| $\forall x \forall x Q(x) \equiv \forall x Q(x)$ $\exists x \exists x Q(x) \equiv \exists x Q(x)$ $\forall x (P(x) \& P(x)) \equiv \forall x P(x)$ $\exists x (P(x) \vee P(x)) \equiv \exists x P(x)$ |
| $\forall x P(x) \& \forall y U(y) \equiv \forall x \forall y (P(x) \& U(y))$ $\forall x P(x) \& \forall x U(x) \equiv \forall x (P(x) \& U(x))$ |
| $\exists x P(x) \vee \exists y U(y) \equiv \exists x \exists y (P(x) \vee U(y))$ $\exists x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \exists x (P(x) \vee U(x))$ |
| $\exists x P(x) \& \exists x U(x) \neq \exists x (P(x) \& U(x))$ $\exists x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \exists x \exists a (P(x) \& U(a))$ |
| $\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \neq \forall x (P(x) \vee U(x))$ $\forall x P(x) \vee \forall x U(x) \equiv \forall x \forall a (P(x) \vee U(a))$ |
| $\forall x P(x) \& \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \& U(a))$ $\forall x P(x) \vee \exists x U(x) \equiv \forall x \exists a (P(x) \vee U(a))$ |

В логике предикатов различают два вида форм: приведенную и предваренную.

Говорят, что формула логики предикатов имеет *приведенную форму*, если она содержит только операции конъюнкции, дизъюнкции и кванторные операции, а операция отрицания отнесена к элементарным формулам.

Среди нормальных форм формул логики предикатов выделяют так называемую *предваренную* (префиксную, пренексную) *нормальную форму* (ПНФ). В ней кванторные операции либо полностью отсутствуют, либо они используются перед всеми операциями алгебры логики.

Алгоритм получения ПНФ:

1. выразите операции импликации и эквиваленции через конъюнкцию, дизъюнкцию и отрицание;
2. внесите символы отрицания так, чтобы они относились непосредственно к символам предикатов (и, таким образом, мы приводим исходную формулу к приведенной форме);
3. для формул, содержащих подформулы вида: $\forall x P(x) \vee \forall x U(x)$, $\exists x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \& \exists x U(x)$, $\forall x P(x) \vee \exists x U(x)$ введите новые связанные переменные;
4. используя свойства и законы логики предикатов, вынесите все кванторы перед высказыванием и получите формулу в виде ПНФ.
- 5.

Примеры выполнения заданий**1. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме:**

$$\begin{aligned}
 (\Box x P(x) \rightarrow \Box y Q(y)) \rightarrow R(z) &\equiv \overline{\Box x P(x)} \Box \Box y Q(y) \Box R(z) \equiv \\
 &\equiv \overline{\Box x P(x)} \Box \Box y Q(y) \Box R(z) \equiv \Box x P(x) \Box \Box y Q(y) \Box R(z)
 \end{aligned}$$

2. Приведите формулу логики предикатов к приведенной форме, где x, y, z – вещественные переменные, применив отрицание к формуле:

$$\begin{aligned}
 \forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z)). \\
 \neg (\forall y \exists x ((y \neq x) \vee \neg \forall y (x < y) \& \forall z (y - x \leq z))) \equiv \\
 \equiv \exists y \forall x ((y = x) \& \forall y (x < y) \vee \exists z (y - x \geq z))
 \end{aligned}$$

3. Приведите формулу логики предикатов к предваренной нормальной форме $\exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y)$.

$$\begin{aligned}
 \exists x \forall y P(x, y) \vee \neg \forall x \exists y Q(x, y) &\equiv \exists x \forall y P(x, y) \vee \exists x \forall y \neg Q(x, y) \equiv \\
 &\equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall y \neg Q(x, y)) \equiv \exists x (\forall y P(x, y) \vee \forall a \neg Q(x, a)) \equiv \\
 &\equiv \exists x \forall y \forall a (P(x, y) \vee \neg Q(x, a)).
 \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Приведите формулу логики предикатов к приведенной нормальной форме:

0)

$$\neg \forall y \exists x T(y, x) \vee \exists y \forall x Q(y, x) ;$$

$$\exists x (\neg \forall y U(y, x) \& \exists z \exists y L(y, z, x)) ;$$

$$\forall x \neg (\forall y A(x, y) \rightarrow \exists y H(z, x)) ;$$

$$\neg \forall y \forall z U(y, z) \sim \forall x \exists y Q(y, x) ;$$

1)

$$\forall y \neg (\exists x G(y, x) \rightarrow \forall z \exists x N(y, x, z)) ;$$

$$\exists x \forall y (\neg (E(y, x) \& \exists z Q(y, z))) ;$$

$$\exists t (\neg (\forall y K(y, t) \sim \exists y \exists z Q(y, t, z))) ;$$

$$\forall z \forall x A(x, z) \vee \forall y \forall z Q(y, x) ;$$

2)

$$\exists y \forall x M(y, x) \& \exists y \forall z Q(y, z) ;$$

$$\exists t \neg (\forall y K(y, t) \rightarrow \exists x \exists y F(y, x, t)) ;$$

$$\forall z \forall y \neg (\exists x G(z, y) \sim \forall x \forall s N(x, s)) ;$$

$$\neg \forall s \exists x U(s, x) \vee \exists y \forall x Q(y, x) ;$$

3)

$$\forall y (\forall m U(y, m) \& \forall x Q(y, x)) ;$$

$$\forall x \neg (\exists y A(x, y) \rightarrow (\neg \exists z \forall y D(y, z))) ;$$

$$\exists x \neg (\exists y \forall z P(z, x, y) \vee \exists z \forall y K(y, x, z)) ;$$

$$\exists x \forall y T(y, x) \sim \neg \exists y \forall x P(y, x) ;$$

4)

$$\forall y \exists z T(y, z) \sim \forall x \forall y Q(y, x) ;$$

$$\exists t \neg (\forall y U(y, t) \vee \exists y \forall x R(y, x)) ;$$

$$\forall x (\neg (\exists y G(y, x) \rightarrow \neg \forall y P(y, x))) ;$$

$$\forall t (\neg \exists x \forall y N(y, x) \& \exists y L(y, t)) ;$$

5)

$$\forall y (\exists x \exists z F(z, y, x) \rightarrow \neg \forall x Q(y, x)) ;$$

$$\exists x \forall y (\neg \forall t U(t, y, x) \vee \neg \forall x \exists y R(y, x)) ;$$

$$\forall z \neg (\forall y A(z, y) \& \neg \exists x \exists y H(y, x)) ;$$

$$\exists a \exists y U(y, a) \sim \exists t \exists a Q(a, t) ;$$

6)

$$\forall y \neg (\exists n A(n, y) \rightarrow \exists y \forall n H(y, n)) ;$$

$$\neg \forall y \forall m U(y, m) \vee \neg \forall y \forall x D(y, x) ;$$

$$\forall x (\exists n C(n, x) \sim \forall t \exists y Q(y, x, t)) ;$$

$$\forall n \forall m \neg \forall y G(n, y, m) \& \neg \forall x \exists y B(y, x)) ;$$

7)

$$\forall z \neg (\forall y C(z, y) \rightarrow \exists y \exists t \forall x Q(t, y, x)) ;$$

$$\exists z \forall y U(z, y) \& \exists x \exists z \forall m F(m, x, z) ;$$

$$\forall x \neg (\exists y \exists t A(x, y, t) \sim \forall y \exists z Q(y, z)) ;$$

$$\forall y \forall m U(y, m) \vee \neg \forall x \exists y \exists m K(m, x, y) ;$$

8)

$$\forall z \neg (\exists x A(x, z) \rightarrow \exists y \neg \exists z Q(y, z)) ;$$

$$\forall y (\forall m U(y, m) \& \neg \exists m \forall x F(y, x, m)) ;$$

$$\forall x \neg (\forall y \exists z K(x, z, y) \sim \exists y Q(y, x)) ;$$

$$\forall x \neg (\forall y \forall t U(t, y, x) \vee \neg \exists y \exists t R(y, t)) ;$$

9)

$$\forall t \neg (\exists y \exists z H(t, y, z) \rightarrow \exists x \forall y G(y, x)) ;$$

$$\exists x \neg \forall y U(y, x) \& \exists x \exists y \forall z Q(y, z, x) ;$$

$$\forall y \forall x \exists z A(y, x, z) \vee \forall x \exists z B(z, x) ;$$

$$\exists x \neg (\forall y K(y, x) \sim \exists y \exists z L(y, x, z)) ;$$

2. Приведите формулы логики предикатов к приведенной нормальной форме, где x, y, z – вещественные переменные, применив отрицание к формуле:

0)

$$\forall y (\exists x (y > x) \vee \forall t (y = t)) ;$$

$$\exists x (\neg \forall y (y < x) \supset \exists z \forall t (z + x + y \geq t)) ;$$

$$\forall x \exists y \exists z ((x + y > z) \& (x + z > y) \& (y + z > x)) ;$$

$$\forall x \forall y (\neg \forall t (y \neq t) \supset (y > x)) ;$$

1)

$$\forall y (\exists x (y \leq x) \supset \forall z ((y = x) \vee (y = z))) ;$$

$$\exists x \forall y (\neg (y - x > 0) \& \exists z (y - z > 0)) ;$$

$$\exists x \forall z (\neg (\exists y (z \neq y) \vee (z \neq x))) \supset (x + z < 0)) ;$$

$$\forall t \exists x \forall y ((y < x) \& (t > x)) ;$$

2)

$$\forall y \exists x ((y \neq x) \& \forall z (y + x > z)) ;$$

$$\exists t (\neg (\forall y (y = t)) \supset \exists x (t > x) \vee (y > t)) ;$$

$$\forall x \exists z \forall y ((y - x > 0) \supset \forall t (y - x > t)) ;$$

$$\exists x \forall y (\neg (y > x) \& \exists z (y < z)) ;$$

3)

$$\begin{aligned}
& \forall t (\neg(\exists x (x = t)) \supset \exists y (y + t > x)) ; \\
& \forall y \forall z ((y > 0) \vee (z > y) \ \& \ \forall x (y > x)) ; \\
& \exists x (\neg(\forall y (y = x)) \supset \exists z (y > z)) ; \\
& \forall z (\exists y (z > 0) \vee \forall t (y < t)) ;
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}
& \forall y \exists x ((y - x > 0) \vee \forall z (y - z > x)) ; \\
& \exists x \forall y ((y = x) \ \& \ \exists z ((z < x) \vee (z < y))) ; \\
& \forall t \exists x ((t \neq x) \ \& \ \forall y (y \neq x) \supset (t \neq x)) ; \\
& \forall z (\neg(\forall y ((z > y) \ \& \ (y > 0))) \supset \exists x (y > x));
\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}
& \forall y \exists x \forall z ((y + x + z \neq 0) \supset \forall t ((t > y) \vee (t > x) \vee (t > z))) ; \\
& \forall x (\forall z ((z^2 > x) \ \& \ (x^2 > z)) \vee (\neg(\exists y (y^2 > x)))) ; \\
& \exists y \forall z (\neg(z = y) \supset (y \neq z)) ; \\
& \forall y (\exists t (y > t) \ \& \ \exists x (y > x));
\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}
& \exists y (\exists z (z = y) \supset (\neg(\exists x (z = x)))) ; \\
& \forall x \forall y \forall z ((x + y > z) \ \& \ (y + z > x) \ \& \ (z + x > y)) ; \\
& \forall t (\neg(\exists y ((t < 0) \vee (y < 0))) \supset (y + t > 0)) ; \\
& \exists z \forall y \forall x ((z - x > 0) \vee (y - x > 0)) ;
\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}
& \forall x (\neg(\forall y (x > y)) \supset \exists z (x + z > y)) ; \\
& \forall y (\exists t (y \neq t) \ \& \ \exists x (y \neq x)) ; \\
& \exists z \forall y ((z < 0) \vee (y < 0) \vee \exists x (x > y + z)) ; \\
& \exists x \exists z \exists y (\neg((x > y) \ \& \ (y > z)) \supset (x < z)) ;
\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}
& \forall x (\neg(\exists y (x + y > 0)) \supset \exists t (t - y + x > 0)) ; \\
& \forall y \forall z ((y \neq z) \ \& \ \forall x (y \neq x)) ; \\
& \forall x \forall y (\neg(\forall z (y \leq x)) \ \& \ (y \geq z)) ; \\
& \exists z \forall x \exists t ((x + z > t) \supset \exists y (\neg(x + t + z < y))) ;
\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}
& \forall z (\exists y (z > y) \supset \exists x (x > z)) ; \\
& \forall x \forall z (\neg(\forall y (y - x > 0)) \ \& \ \exists t (y + z + t < 0)) ; \\
& \exists t \forall y ((y \neq t) \vee \forall z (y - z \neq t)) ; \\
& \exists x \exists t (\forall y (y > x) \supset \exists z (\neg(y + x + t > z))) ;
\end{aligned}$$

3. Приведите к предваренной нормальной форме следующие формулы логики предикатов:

0)

$$\begin{aligned} & \forall y \exists x T(y, x) \vee \forall z \forall x Q(z, x) ; \\ & \neg \forall y \forall x U(y, x) \& \exists x \forall y R(y, x) ; \\ & \forall y \exists x T(y, x) \supset \forall y \forall x Q(y, x); \\ & \neg \forall y \forall x U(y, x) \supset \exists x \forall y R(y, x) ; \\ & \forall y \forall x \exists z K(y, x, z) \supset \forall x \exists z \exists y P(y, x, z) ; \end{aligned}$$

1)

$$\begin{aligned} & \forall y (\exists x \forall y G(y, x) \vee \forall s \exists x N(y, x, s)) ; \\ & \forall y \neg \exists x U(y, x) \& \forall x \forall y Q(y, x) ; \\ & \exists y \forall x \exists z H(x, y, z) \supset \exists y \exists x G(y, x) ; \\ & \forall x \neg \forall y P(y, x) \supset \exists y \exists x Q(y, x) ; \\ & \exists y \forall x \exists z U(x, y, z) \supset \exists y \exists x \exists z G(y, x, z) ; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} & \forall y \exists x A(y, x) \& \exists y \forall z P(y, z) ; \\ & \neg \forall y \exists x K(y, x) \vee \exists z \exists y \forall x Q(y, x, z) ; \\ & \forall x \exists y A(x, y) \supset \exists y \neg \forall x R(y, x) ; \\ & \forall y \forall x U(y, x) \supset \forall x \exists y P(y, x) ; \\ & \forall y \exists m \exists z P(y, m, z) \supset \exists m \exists y \exists z G(m, y, z) ; \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} & \forall x (\neg (\exists y A(x, y) \vee \exists y P(y, x))) ; \\ & \exists y \forall m U(y, m) \& \forall x \forall y Q(y, x); \\ & \forall z \exists x T(z, x) \supset \forall y \exists x U(y, x) ; \\ & \forall x (\neg \forall y U(y, x) \supset \exists y Q(y, x)) ; \\ & \forall z \exists x \forall y Q(z, x, y) \supset \forall y \exists x A(y, x) ; \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned} & \exists x \forall y T(y, x) \vee \forall y \forall x H(y, x) ; \\ & \forall y \neg \exists x U(y, x) \& \exists y \forall z Q(y, z) ; \\ & \forall x \neg \forall y A(x, y) \supset \exists y \forall z T(y, z) ; \\ & \forall y \exists m \exists z U(y, m, z) \supset \exists y \exists z Q(y, z); \\ & \exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \supset \forall y \neg \forall n \forall x R(n, y, x) ; \end{aligned}$$

5)

$\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \& \forall y \neg \exists n A(n, y) ;$
 $\forall y (\forall m U(y, m) \vee \neg \forall x \forall m Q(y, x, m)) ;$
 $\exists n \forall y \forall x P(n, y, x) \supset \forall y \neg \exists n A(n, y) ;$
 $\forall y (\forall m \exists x U(y, x, m) \supset \neg \forall x \forall m Q(y, x, m)) ;$
 $\forall y \neg \exists x G(y, x) \supset \forall y \forall x Q(y, x) ;$

6)

$\forall z \exists x T(z, x) \vee \forall y \exists x U(y, x) ;$
 $\forall x (\neg \forall y U(y, x) \& \forall y Q(y, x)) ;$
 $\exists x \forall y T(y, x) \supset \forall y \forall x H(y, x) ;$
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \supset \exists y \forall x Q(y, x) ;$
 $\forall x \exists y R(x, y) \supset \exists y \forall x P(y, x) ;$

7)

$\forall x \neg \forall y A(x, y) \vee \exists y \forall z T(y, z) ;$
 $\forall y \exists m \exists z U(y, m, z) \& \exists x \exists y \exists z Q(y, x, z) ;$
 $\forall x (\neg (\exists y A(x, y) \supset \exists y P(y, x))) ;$
 $\exists y \forall x U(y, x) \supset \forall x \forall y Q(y, x) ;$
 $\neg \forall y \exists x P(y, x) \supset \exists z \exists y \forall x Q(y, x, z) ;$

8)

$\forall x \exists y A(x, y) \vee \exists y \neg \exists x R(y, x) ;$
 $\forall y \forall z U(y, z) \& \forall x \exists y P(y, x) ;$
 $\forall y \forall z A(y, z) \supset \exists y \forall z P(y, z) ;$
 $\neg \forall y \exists x K(y, x) \supset \exists z \forall y \forall x Q(y, x, z) ;$
 $\forall y (\exists x \exists y T(y, x) \supset \forall s \exists x K(y, s)) ;$

9)

$\exists y \forall x \exists z H(x, y, z) \vee \exists y \forall x G(y, x) ;$
 $\forall x \neg \forall y P(y, x) \& \exists y \exists x Q(y, x) ;$
 $\forall y (\exists x \exists y G(y, x) \supset \forall s N(y, s)) ;$
 $\forall y \neg \exists x U(y, x) \supset \exists x \forall y Q(y, x) ;$
 $\forall y \neg \exists x H(y, x) \supset \forall x \forall y P(y, x) ;$

Язык логики предикатов удобен для записи математических предложений и определений. Он дает возможность выражать логические связи между понятиями, записывать определения, теоремы, доказательства.

Примеры выполнения заданий

Запишите определение на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте его отрицание:

Функция f непрерывна в точке x_0 , если и только если для всякого положительного числа ε существует положительное число δ такое, что для всякого x из области определения D функции f , если $|x - x_0| < \delta$, то $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

Решение. Запишем это определение на языке логики предикатов двумя разными способами.

1 способ:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (P(\varepsilon, \delta, x)), \text{ где}$$

$$P(\varepsilon, \delta, x) = (0 < |x - x_0| < \delta \supset |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

2 способ, используя ограниченные кванторы:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in D (|x - x_0| < \delta \supset |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)$$

Построим отрицание этого определения:

$$\begin{aligned} & \neg (\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall x \in M_f (|x - x_0| < \delta \supset (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))) \equiv \\ & \equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in M_f (\neg (|x - x_0| < \delta \supset (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon))) \equiv \\ & \equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in M_f (|x - x_0| < \delta \ \& \ \neg (|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon)) \equiv \\ & \equiv \exists \varepsilon > 0 \forall \delta > 0 \exists x \in M_f (|x - x_0| < \delta \ \& \ (|f(x) - f(x_0)| \geq \varepsilon)). \end{aligned}$$

Задания для самостоятельного выполнения

1. Запишите аксиомы положительных величин на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы:

0) Коммутативность сложения

Для любых двух величин $a, b \in A$ справедливо $a + b = b + a$.

1) Ассоциативность сложения

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ справедливо $a + (b + c) = (a + b) + c$.

2) Монотонность сложения

Для любых двух величин $a, b \in A$ справедливо $a + b > a$.

3) Транзитивность отношения

Для любых трех величин $a, b, c \in A$. Если $a < b$ и $b < c$, то $a < c$.

4) Возможность суммирования

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ существует однозначно определенная величина $c = a + b$.

5) Возможность вычитания

Для любых двух величин $a, b, c \in A$ если $a > b$, то существует одна и только одна величина $c \in A$, для которой $b + c = a$.

6) Возможность деления

Какова бы ни была величина $a \in A$ и натуральное число n , найдется такая величина $b \in A$, что $n * b = a$.

7) Возможность сравнения

Для любых двух величин $a, b \in A$ имеет место одно из трех отношений:

$$a = b, a < b, a > b.$$

8) Аксиома Архимеда или Евдокса

Каковы бы ни были величины $a, b \in A$, существует такое n , что $n * b > a$

9) Аксиома соизмеримости отрезков

Пусть последовательность величин $a_i \in A, i = 1...n$ обладает свойством

$a_1 < a_2 < ... < a_n < ...$, а последовательность $b_i \in A, i = 1...n$ своим

$b_1 < b_2 < ... < b_n < ...$, при этом $a_i < b_i$ для любых $i, j \in N$.

Пусть для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $N(\varepsilon)$, что при всех $n > N$ разность $|a_n - b_n| < \varepsilon$. Тогда существует единственный элемент $c \in A$, удовлетворяющий условиям $a_i < c, c < b_j$ для любых $i, j \in N$.

2. Запишите некоторые аксиомы действительных чисел на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы:

0) $x + x' = 0$ (для любого $x \in R$ существует $x' \in R$, противоположный x)

1) $x \neq y \Rightarrow x > y$ или $y > x$ (для любых $x, y \in R$)

2) $(x * y) * z = x * (y * z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

3) $\neg x > x$ (для любого $x \in R$)

4) $(x + y) * z = x * z + y * z$ (для любых $x, y, z \in R$)

5) $(x > y, y > z) \Rightarrow (x > z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

- 6) $x \neq 0 \Rightarrow x * x' = 1$ (для любого $x \in R$. и $x \neq 0$ существует $x' \in R$, x' – обратный элемент для x)
- 7) $(x > y) \Rightarrow (x + z > y + z)$ (для любых $x, y, z \in R$)
- 8) $x * 1 = x, 1 \in R$ (для любого $x \in R$)
- 9) $(x > y, z > 0) \Rightarrow (x * z > y * z)$ (для любых $x, y, z \in R$)

3. Подберите элементарные предикаты и запишите следующие высказывания:

- 0) а) каждое положительное действительное число является квадратом другого;
 б) натуральное число, которое делится на 6, разделится и на 2;
- 1) а) для каждого натурального числа существует одно и только одно число, непосредственно следующее за ним;
 б) каждое действительное число является кубом другого;
- 2) а) натуральное число, которое делится на 6, разделится и на 3;
 б) произведение двух натуральных чисел, одно из которых четное, другое нечетное, есть число четное;
- 3) а) от перемены мест сомножителей произведение не меняется;
 б) натуральное число, которое делится на 2 и 3, разделится на 6;
- 4) а) натуральное число, которое делится на 9, разделится на 3;
 б) от перемены мест слагаемых сумма не меняется;
- 5) а) частное от деления двух натуральных четных чисел, если оно существует, есть число четное или нечетное;
 б) если произведение двух натуральных чисел делится на 5, то хотя бы один из сомножителей делится на 5;
- 6) а) для чисел отличных от нуля существует наибольший общий делитель;
 б) если произведение двух натуральных чисел делится на 12, то среди них есть четное число, делящееся на 3;
- 7) а) если произведение двух натуральных чисел делится на 18, то хотя бы один сомножитель делится на 6 или хотя бы один из сомножителей нечетный;

- б) сумма двух натуральных чисел, имеющих различную четность, нечетна;
- 8) а) для чисел отличных от нуля существует наименьшее общее кратное;
 б) если ни одно из двух натуральных чисел не делится на 11, то их произведение не делится на 11;
- 9) а) если произведение двух натуральных чисел делится на 12, то хотя бы один из сомножителей делится на 3 или хотя бы один из сомножителей четный;
 б) сумма двух натуральных четных чисел, есть число четное.

4. Запишите определения на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Функция $f(x)$ называется возрастающей в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) < f(x_2)$.

1) Прямая называется асимптотой графика функции $y = f(x)$, если при удалении точки M в бесконечность по графику, расстояние от M до этой прямой стремится к нулю

2) Функция $\alpha(x)$ называется бесконечно малой при $x \rightarrow a$, если для любого $\varepsilon > 0$ вблизи точки a выполняется неравенство $|\alpha(x)| < \varepsilon$ (это значит, что существует проколота окрестность точки a , в которой выполняется указанное неравенство)

3) Функция f непрерывна в точке a , если она определена в этой точке и разность $f(x) - f(a)$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$, т.е. функция f непрерывна в точке a в том и только в том случае, когда
$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

4) Функция $f(x)$ бесконечно большая при $x \rightarrow a$, если функция $\frac{1}{f(x)}$ бесконечно мала при $x \rightarrow a$.

5) Функция называется периодической, если существует такое число T , что для любого аргумента x число $x \pm T$ принадлежит области определения и $f(x \pm T) = f(x)$.

6) Число A называется пределом бесконечной числовой последовательности $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, \dots, a_i, \dots, a_n, \dots$, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное n_ε , что для всякого номера n , если $n > n_\varepsilon$, то $|a_n - A| < \varepsilon$.

7) Функция $f(x)$ называется убывающей в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

8) Функция называется четной, если для любого аргумента x из области определения число $-x$ также входит в область определения и $f(-x) = f(x)$.

9) Функция $f(x)$ называется **убывающей** в промежутке X из области определения, если для любых $x_1, x_2 \in X$, из условия $x_1 < x_2$ следует неравенство $f(x_1) > f(x_2)$.

5. Запишите определения на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Действительная функция $f(x)$ действительного переменного x есть **функция ограниченной вариации** на интервале $[a, b]$, если существует такое положительное число M , что для всех разбиений $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ интервала $[a, b]$ выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^n |f(x_i) - f(x_{i-1})| < M$$

1) **Абсолютным экстремумом** числовой функции f называется точка P_0 в области определения D функции, обладающая свойством $f(P_0) \geq f(P)$ для всех P , принадлежащих D (абсолютный максимум) или свойством $f(P_0) \leq f(P)$ для всех P , принадлежащих D (абсолютный минимум).

2) Однозначная функция f комплексного переменного $z = x + iy$ называется **аналитической функцией** в точке z_0 , если в некотором круге $|z - z_0| < r$ с центром z_0 и радиусом $r > 0$ она определена и представима степенным рядом:

$$f(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots + a_n(z - z_0)^n + \dots$$

3) Функция $F(x)$ называется **первообразной** для функции $f(x)$ на заданном промежутке (a, b) из ее области определения $D(f)$, если для x из (a, b) выполняется равенство $F'(x) = f(x)$.

4) Точка x_0 из области определения $D(f)$ функции f называется **точкой максимума** этой функции, если найдется δ -окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \leq f(x_0)$.

5) Число b называется **пределом функции** $f(x)$, если для любого положительного числа ε найдется такое положительное число δ , что если всех $x \rightarrow a$, удовлетворяющих неравенству $|x - a| < \delta$, будет выполняться неравенство $|f(x) - b| < \varepsilon$.

6) Точка x_0 из области определения $D(f)$ функции f называется **точкой минимума** этой функции, если найдется δ -окрестность $(x_0 - \delta; x_0 + \delta)$ точки x_0 , такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) \geq f(x_0)$.

7) Вектор-функция $v(t)$ **ограничена**, если для каждого положительного числа ε существует такое число δ , что из $0 < |t - t_1| < \delta$ следует $|v(t) - v_1| < \varepsilon$.

8) Аппроксимация функции f на отрезке $[a, b]$ функциями $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ при условии, что отклонение f от X_n измеряется с помощью $\rho(f, X_n) = \max |f(x) - X_n(x)|$ при $a \leq x \leq b$, называется **равномерной аппроксимацией**.

9) **Интервалом числовой прямой** называется множество действительных чисел x , удовлетворяющих неравенству $a < x < b$, где a и b – действительные числа, $x_0 = (a + b)/2$ – центр интервала. Интервал числовой прямой называется δ -окрестностью точки x_0 , если $|x - x_0| < \delta$.

6. Запишите теоремы и свойства на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Основная теорема алгебры.

Всякий отличный от константы многочлен вида:

$$F(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \dots + p_1 x + p_0$$

с действительными коэффициентами имеет, по крайней мере, один корень в поле комплексных чисел.

1) Общие свойства числовых полей:

Для любых элементов a и b поля F определены их сумма $a + b$ и произведение $a \times b$. В поле существует ноль и единица.

2) Основная теорема алгебры по Эйлеру:

Всякий многочлен с вещественными коэффициентами можно разложить в произведение линейных и квадратичных множителей с вещественными коэффициентами.

3) Теорема о достаточном условии монотонности

Если функция $f(x)$ дифференцируема в промежутке X и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in X$, то $f(x)$ возрастает (соответственно убывает) в промежутке X .

4) Следствие из основной теоремы алгебры:

Любой многочлен степени n над полем комплексных чисел имеет в нём ровно n корней, с учётом кратности корней.

5) Лемма Д'Аламбера

Если для какого-нибудь x $f(x) \neq 0$, где $f(x)$ - многочлен степени ≥ 1 , то найдется точка x_1 такая, что $|f(x_1)| < |f(x)|$.

6) Общие свойства числовых полей:

Для любого числового поля F справедливы тождества:

$$a + b = b + a$$

$$(ab)c = a(bc)$$

$$(a + b) + c = a + (b + c)$$

$$a \times 1 = a$$

$$a + 0 = a$$

$$a \times 1/a = 1$$

$$a + (-a) = 0$$

$$a(b + c) = ab + ac$$

$$ab = ba$$

7) Теорема о производной

Функция $y = f(x)$ имеет в точке x (конечную) производную в том и только в том случае, если она дифференцируема в этой точке. При этом верно равенство $dy = f'(x) dx$.

8) Общие свойства числовых полей:

Для любого числа a из поля F в F есть противоположное ему число $-a$, а если $a \neq 0$, то и обратное ему число $1/a$.

9) Теорема о достаточном условии выпуклости вверх и вниз

Если функция $f(x)$ дифференцируема дважды в интервале X и в ней

$f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), то $f(x)$ является выпуклой вниз (соответственно выпуклой вверх) в интервале X .

7. Запишите теоремы на языке логики предикатов, используя ограниченные кванторы, и постройте их отрицания:

0) Теорема Фейера о суммировании средними арифметическими.

Каждый ряд Фурье суммируем средними арифметическими к функции $f(t)$ при всех t в интервале $(-T/2, T/2)$, для которых функция $f(t)$ непрерывна; в точках разрыва первого рода средние арифметические сходятся к $(f(t-0) + f(t+0))/2$

1) Теорема Вейерштрасса об изолированной особой точке.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, имеющая изолированную особую точку при $z = a$. Тогда для любого комплексного числа A (включая $A = \infty$) существует последовательность точек $z_k \rightarrow a$ такая, что $\lim_{k \rightarrow \infty} f(z_k) = A$ при $k \rightarrow \infty$.

2) Теорема Пикара об изолированной особой точке.

Пусть $f(z)$ – однозначная функция, имеющая изолированную особую точку при $z = a$. Тогда для любого комплексного числа $A \neq \infty$, за исключением, быть может, одного значения $A = A_0$, каждая окрестность точки a содержит бесконечное множество точек z таких, что $f(z) = A$.

3) Теорема Лагранжа о конечном приращении.

Если функция $f(x)$ непрерывна на $[a, b]$ и дифференцируема на (a, b) , то в интервале (a, b) существует такое число X , что $f(b) - f(a) = f'(X)(b - a)$.

4) Теорема Вейерштрасса о приближении.

Пусть $f(x)$ – действительная функция, непрерывная на ограниченном замкнутом интервале $[a, b]$. Тогда для каждого заданного положительного числа ε существует такой действительный многочлен

$$P(x) \equiv \sum_{k=0}^n a_k x^k, \text{ что } |f(x) - P(x)| < \varepsilon \text{ при всех } x \in [a, b].$$

5) Теорема Коши о среднем значении

Если функции $u(x)$ и $v(x)$ непрерывны на $[a, b]$ и $v(b) \neq v(a)$ и существуют производные $u'(x)$ и $v'(x)$ в интервале (a, b) и одновременно не обращаются в нуль, то в интервале (a, b) существует такое число X , что

$$\frac{u(b) - u(a)}{v(b) - v(a)} = \frac{u'(X)}{v'(X)}$$

6) Теорема Руше о нулях функции

Если $f_1(z)$ и $f_2(z)$ – аналитические функции в ограниченной области D и на ее контуре C и если $|f_2(z)| < |f_1(z)| \neq 0$ на C , то функции $f_1(z)$ и $f_1(z) + f_2(z)$ имеют одинаковое число нулей в области D .

7) Теорема о функциях, разложимых в ряд Фурье

Ряд Фурье или интеграл Фурье, порожденный действительной функцией $f(t)$, абсолютная величина которой интегрируема на интервале разложения I , сходится равномерно к $f(t)$ на каждом таком интервале

$(a, b) \subset (a - \delta, b + \delta) \subset I$, где $\delta > 0$, что на $(a - \delta, b + \delta)$ функция $f(t)$ непрерывна.

8) Теорема Фейера о сходимости средних арифметических.

Средние арифметические сходятся к $f(t)$ почти всюду в интервале разложения; они сходятся к $f(t)$ равномерно на каждом таком интервале

(a, b)

9) Теорема Ролля об отделении действительных корней

Пусть a и b – два соседних действительных корня уравнения $f'(x) = 0$ и пусть $f(a) \neq 0$ и $f(b) \neq 0$. Уравнение $f(x) = 0$ между a и b либо вовсе не имеет действительных корней, либо имеет один действительный корень в зависимости от того, будут ли числа $f(a)$ и $f(b)$ иметь одинаковые или противоположные знаки.

Глава 4. Элементы теории алгоритмов

4.1. Практическое занятие №14. Способы описания алгоритмов.

К основным изобразительным средствам алгоритмов можно отнести следующие способы записи:

- словесная;
- словесно-формульная;
- в графическом виде (в виде блок-схем);
- в виде текста программы на алгоритмическом языке.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите в словесной форме алгоритм вычисления значения логической функции, реализующую операцию конъюнкции:

$$f(x, y) = \begin{cases} \text{true, если } x = 1, y = 1; \\ \text{false, в остальных случаях} \end{cases}$$

Решение.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.
2. Проверить, x равно 1 и y равно 1? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно true’, перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, x равно 1 и y равно 0 или x равно 0 и y равно 1 или x равно 0 и y равно 0? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно false’, перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

2. Опишите пример 1 в словесно-формульной форме.

1. Ввести значения аргументов x и y . Перейти к п. 2.
2. Проверить, $x = 1$ и $y = 1$? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно true’, перейти к п. 4, иначе перейти к п. 3.
3. Проверить, $x = 1$ и $y = 0$ или $x = 0$ и $y = 1$ или $x = 0$ и $y = 0$? Если да, то выдать сообщение: ‘Значение функции равно false’, перейти к п. 4, иначе выдать сообщение об ошибке ввода.
4. Завершить процесс.

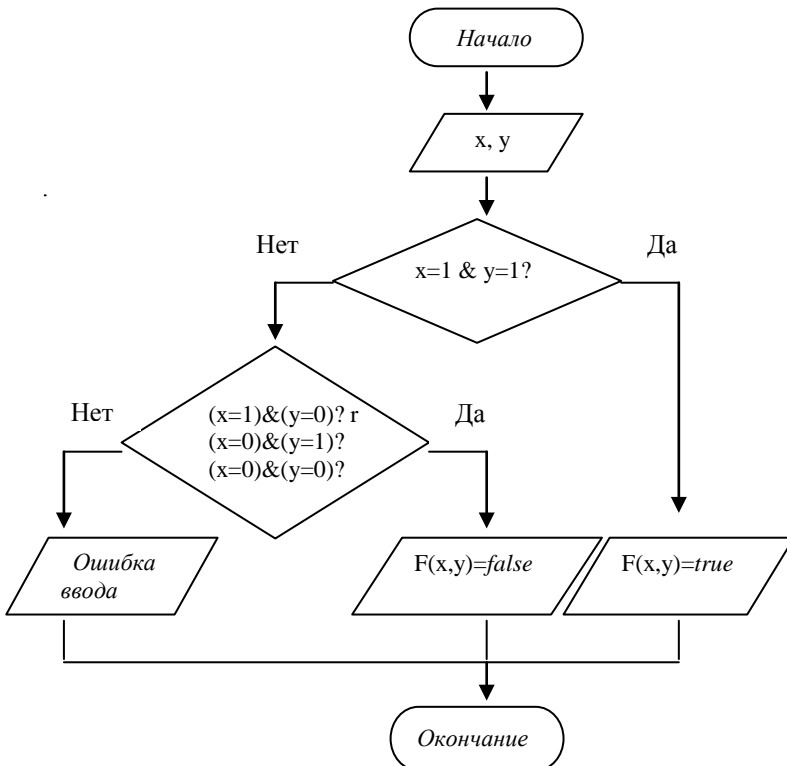
3. Опишите пример 1 в виде текста программы на алгоритмическом языке.

```

Program func;
var x, y: integer;
begin
  writeln ('Введите значения двух аргументов функции (0/1)');
  readln (x, y);
  if (x = 1) and (y = 1) then write ('Значение функции равно
true');
  if (x = 1) and (y = 0) or (x = 0) and (y = 1) or (x = 0) and (y = 0)
  then write ('Значение функции равно
false')
  else write ('Ошибка ввода')
end.

```

5. Опишите пример 1 в виде блок-схемы



Задания для самостоятельного выполнения

1. Опишите алгоритмы в словесной форме:

1. Переменной d присваивают длину окружности, площадь круга и объем шара одного и того же заданного радиуса.
2. Даны произвольные числа a, b, c . Если нельзя построить треугольник с такими длинами сторон, то напечатать 0, иначе напечатать 3 - если треугольник равносторонний, 2 - если треугольник равнобедренный или 1 - в противном случае.
3. Даны целые числа k и m , действительные числа x, y, z . При $k < m^2$, $k = m^2$ или $k > m^2$, замените модулем соответственно значения x, y, z , а два других уменьшить на 0.5.

2. Опишите алгоритмы в словесно-формульной форме:

1. Даны два числа a и b . Обменяйте их значениями, не используя третьей переменной.
2. Для заданного числа a найдите корень уравнения $f(x)=0$, где:

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot \sin 2ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ a^3 x - 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

3. Найдите корни квадратного уравнения, если заданы коэффициенты a, b, c .
4. Вычислите площадь треугольника по заданным сторонам, если это возможно.
5. Даны действительные числа x, y, z . Вычислите: $\max(\min(y + z, x * y), y + e^x)$.
6. Дано число a . Определите первый отрицательный член и его номер в последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_1=a, x_n=\operatorname{tg}(x_{n-1})$.

4.2. Практическое занятие №15. Виды алгоритмов.

Линейные алгоритмы

Алгоритмы могут описывать три вида процессов обработки информации, существующих в природе: *линейные, разветвляющиеся и циклические*.

Процесс обработки информации называется **линейным**, если действия выполняются в линейной последовательности их записи (см. рис.5.1)

Примеры выполнения заданий

1. Опишите графическим способом алгоритм расчета нормы расхода гербицида (л/га) по формуле: $N = \frac{W \cdot n \cdot 600}{V \cdot D}$.

Решение.

На рис. 5.2. приведена блок-схема решения задачи.

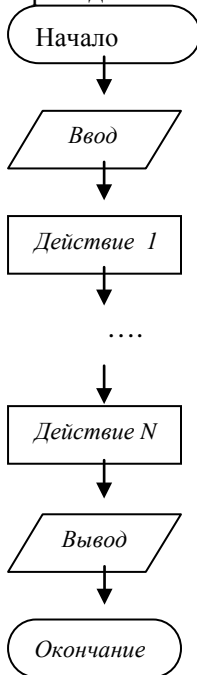


Рис. 5.1. Блок-схема линейного процесса обработки информации

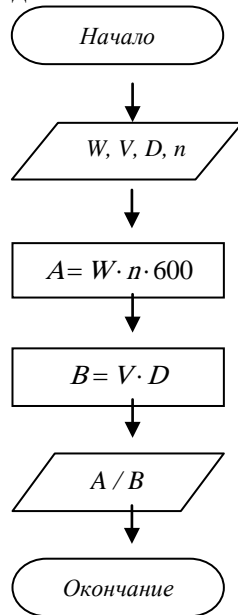


Рис.5.2. Блок-схема алгоритма задачи 1

Задания для самостоятельного выполнения

1. Опишите алгоритмы в графической форме, в которых переменной *d* присваивают:

- 0) длину окружности, площадь круга и объем шара одного и того же заданного радиуса;
- 1) периметр и площадь прямоугольного треугольника по длинам двух катетов;
- 2) площадь и периметр некоторого треугольника по координатам трех вершин;
- 3) длину третьей стороны и площадь треугольника по длинам двух сторон и углу (в градусах) между ними;
- 4) произведение цифр заданного четырехзначного числа;
- 5) дробную часть среднего геометрического трех заданных положительных чисел;
- 6) корень уравнения: $\arctg(1 + \ln x) = \sqrt{2}$;
- 7) корень уравнения: $\arcsin(1 + \ln x) = \frac{1}{e^x}$;
- 8) расстояние между точками с координатами $A(x_1, y_1)$ и $B(x_2, y_2)$;
- 9) площадь треугольника со сторонами a, b, c .

2. Опишите алгоритмы в графической форме. Даны положительные вещественные числа *x* и *y*. Присвойте целой переменной *z*:

- 0) сумму цифр из дробной части чисел x и y ;
- 1) произведение второй и третьей цифр дробной части числа x ;
- 2) сумму цифр целой части числа x ;
- 3) куб разности третьей и второй цифр целой части числа x ;
- 4) произведение вторых цифр из дробной части двух чисел x и y ;
- 5) абсолютную часть разности целых частей чисел x и y ;
- 6) квадрат разности второй и первой цифр из дробной части числа x ;
- 7) сумму третьих цифр из дробной части чисел x и y ;
- 8) целую часть от квадратного корня суммы первых цифр чисел x и y ;
- 9) целую часть частного вторых цифр из дробной части чисел x и y .

Разветвляющиеся алгоритмы

Процесс обработки информации называется *разветвляющимся*, если в зависимости от проверки некоторого условия предусмотрен выбор по двум направлениям.

Алгоритм, описывающий разветвляющийся процесс представлен на рис. 5.3.

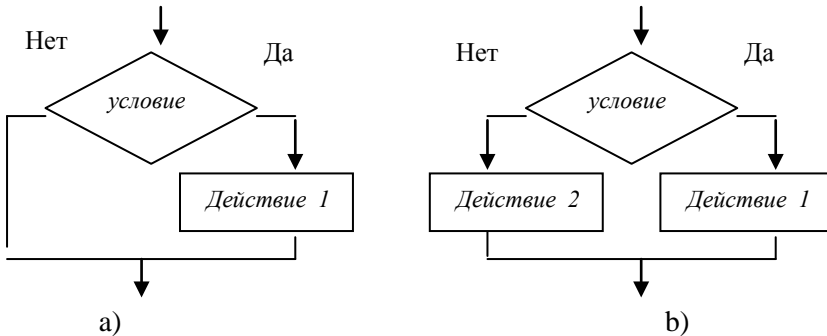


Рис. 5.3. Блок-схема разветвляющегося процесса обработки информации:

- а) краткая форма вида “Если ..., то ...”;
 б) полная форма вида “Если ..., то ..., иначе”.

Примеры выполнения заданий

1. Опишите графическим способом алгоритм вычисления значе-

ния выражения:
$$Z = \frac{\sqrt{ax^3 + e^x}}{\ln(x + a)}$$

Предполагается, что выражение знаменателя дроби $(x + a)$ больше нуля.

Решение: на рис. 5.4. приведена блок-схема решения задачи.

2. Даны действительные числа x , y и z . Составьте блок-схему алгоритма вычисления: $\max(\min(x^2 + y, z^2), z^3 - e^y)$.

Решение: на рис. 5.5. приведена блок-схема решения задачи.

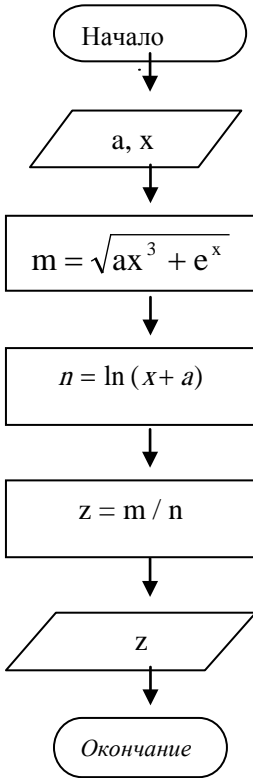


Рис. 5.4. Блок-схема решения задачи 1

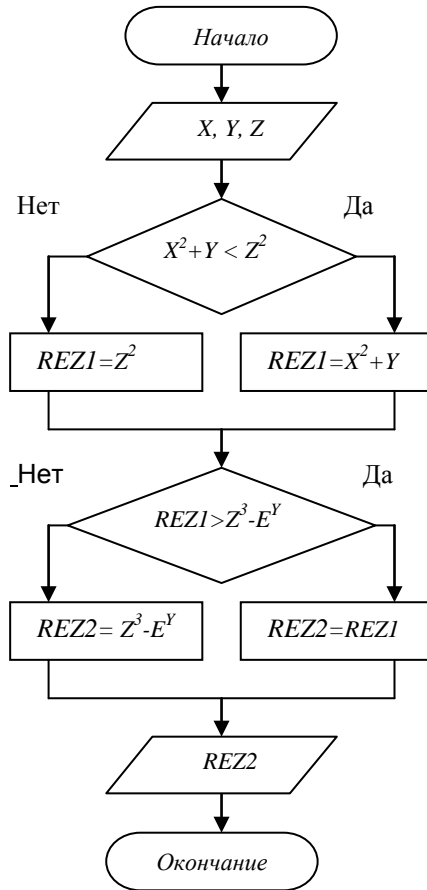


Рис. 5.5. Блок-схема решения задачи 2

Задания для самостоятельного выполнения

Опишите алгоритмы в графической форме для следующих задач:

1. Даны произвольные числа a, b, c . Если нельзя построить треугольник с такими длинами сторон, то напечатать 0, иначе напечатать 3 - если треугольник равносторонний, 2 - если треугольник равнобедренный или 1 - в противном случае.

2. Даны целые числа k и m , действительные числа x, y, z . При $k < m^2$, $k = m^2$ или $k > m^2$, замените модулем соответственно значения x, y, z , а два других уменьшить на 0.5.

3. Для заданного числа a найдите корень уравнения $f(x)=0$, где:

$$0) \quad f(x) = \begin{cases} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}; \\ a^2 x + 1, & \text{иначе} \end{cases} \quad 1) \quad f(x) = \begin{cases} x^3 + 20a, & \text{если } 0 < x < \sqrt{ax^5} + 1, \\ \sqrt{ax^5} + 1, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$2) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{\sin^2 x^3}{a+5}, & \text{если } x > 0 \\ \frac{ax^4 - 1}{a}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 3) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^3}{x-1}, & \text{если } x > 1 \\ \frac{x^4 - 3}{a}, & \text{иначе} \end{cases};$$

$$4) \quad f(x) = \begin{cases} a - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < 1; \\ \cos^2 ax, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 5) \quad f(x) = \begin{cases} \frac{a^2}{x} \sin ax, & \text{если } -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2} \\ x^3 - 4a + 5, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$6) \quad f(x) = \begin{cases} x^2 + 8ax - 6, & \text{если } x \leq 2 \\ \frac{1}{a^2 x + 6x - 12}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 7) \quad f(x) = \begin{cases} a^3 - \sin x^2, & \text{если } 0 < x < \sqrt{ax^5} - \frac{a}{25} \\ x^5 - \frac{a}{25} \sqrt{ax^5}, & \text{иначе} \end{cases}$$

$$8) \quad f(x) = \begin{cases} a\sqrt{|x-1|}, & \text{если } x > 1 \\ 1 + \frac{x^4}{\sqrt[3]{a}}, & \text{иначе} \end{cases}; \quad 9) \quad f(x) = \begin{cases} \cos\left(ax - \frac{\pi}{6}\right), & \text{если } x > \frac{\pi}{6} \\ \sin(ax^2 + \pi), & \text{иначе} \end{cases}$$

4. Даны действительные числа x, y и z . Вычислите:

- 0) $\max(\min(y + z, x * y), e^{(x+y)})$;
- 1) $\max(x, y / z) / \min^3(y, z)$;
- 2) $\min^2(x + y - z, x / y * z)$;
- 3) $\max(x + y, z^2) / \min(x, y + z)$;
- 4) $\max(x^3 + z, \min(x * z, y / z))$;
- 5) $\max^2(x, y, z) / (x * y + z)$;
- 6) $(x * y * z) / \min^2(x, y, z)$;

- 7) $\min (x / y, y / z) * \max (x, y);$
 8) $\max (e^{(y+z)}, \min (x^2, y^3, z^4));$
 9) $\min (\max (x^2 + y, x + z^3), x^2 + z^2).$

Где \max – максимальное значение, а \min – минимальное значение.

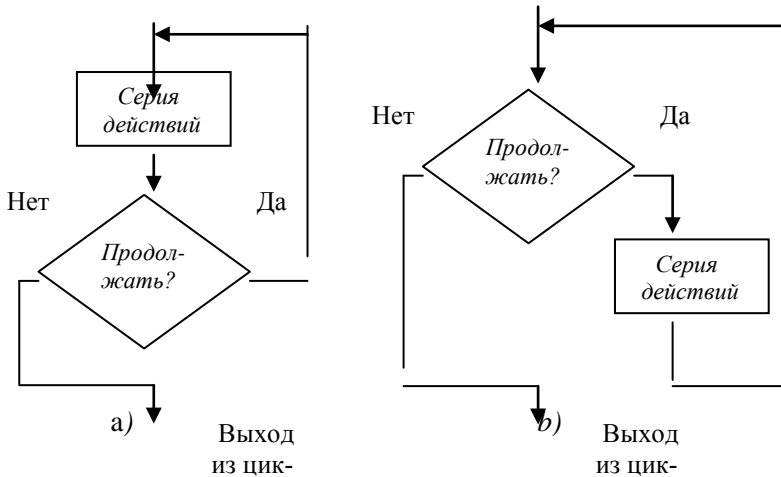
Практическое занятие №16. Виды алгоритмов.

Циклические алгоритмы

Процесс обработки информации называется **циклическим**, если существуют многократно повторяемые последовательности шагов процесса (серия действий). Эта последовательность шагов называется **циклом**.

Существуют несколько вариантов управления циклом посредством задания условий продолжения и завершения.

Графическая схема управления циклическим процессом посредством задания условия продолжения выполнения вычислительного процесса: а) цикл с проверкой постусловия; б) цикл с проверкой предусловия.

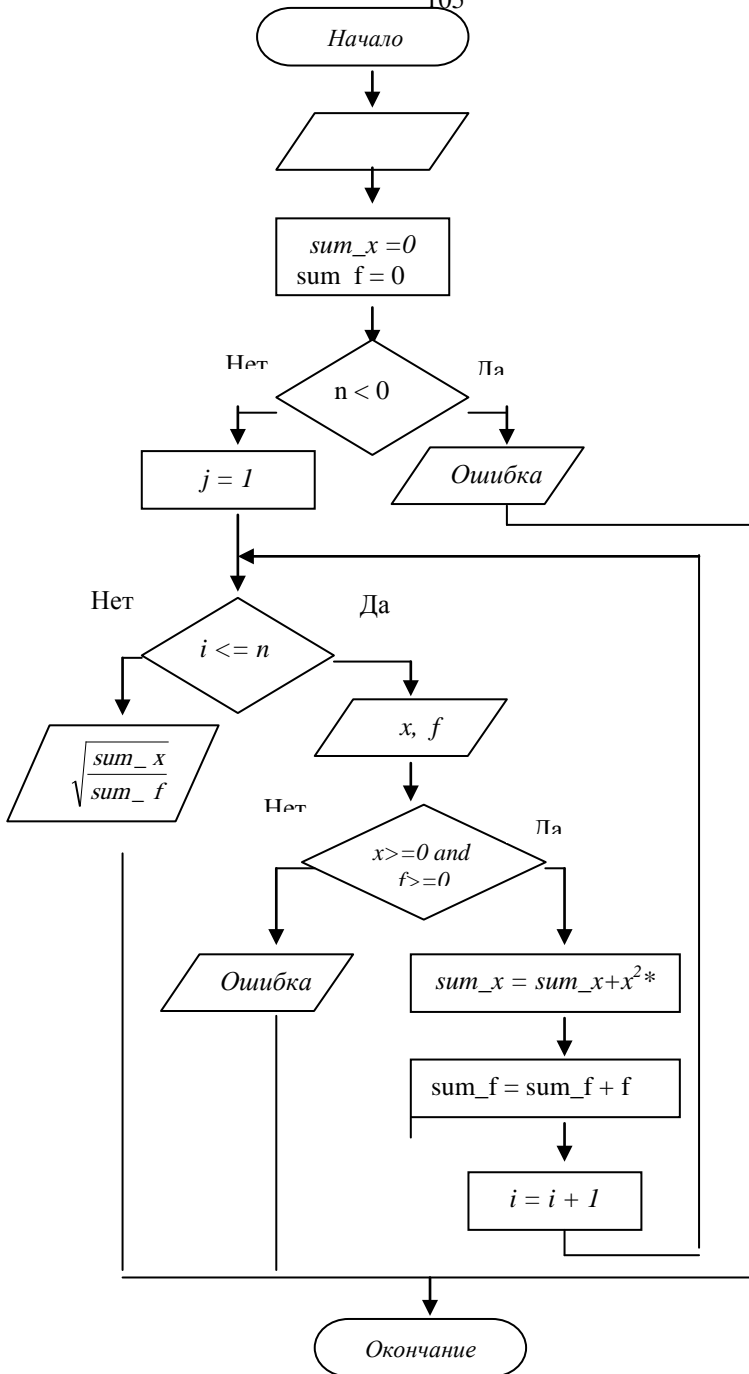


Примеры выполнения заданий

1. Составьте блок-схему алгоритма вычисления среднеквадратической взвешенной по формуле:

$$\bar{x} = \sqrt{\frac{\sum x^2 \cdot f}{\sum f}}$$

Решение: на рисунке приведен алгоритм решения задачи:



2. Составьте блок-схему алгоритма вычисления суммы кубов последовательности, состоящей из положительных чисел до первого введенного отрицательного числа.

Решение: на рис. 5.8. приведен алгоритм решения задачи.

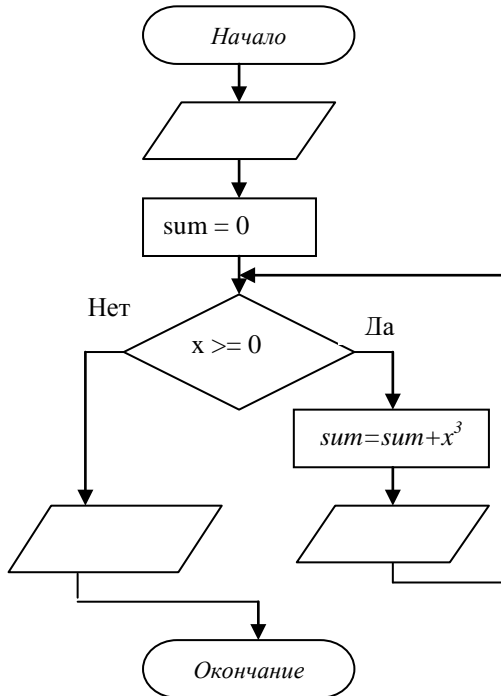


Рис. Схема решения задачи 2

Задания для самостоятельного выполнения

Опишите алгоритмы в графической форме для следующих задач:

1. Дано число a . Определите первый отрицательный член и его номер в последовательности x_1, x_2, \dots, x_n , где $x_1 = a$,

$$x_n = 1/n + x_n * \operatorname{tg}(x_{n-1});$$

$$x_n = \operatorname{Cos}(x_{n-1}) / 2;$$

$$x_n = \operatorname{Sin}(x_{n-1}) * 1.5;$$

$$x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) / \operatorname{Sin}(x_n);$$

$$x_n = 1/n * \operatorname{tg}(x_{n-1});$$

$$x_n = \operatorname{Cos}(x_{n-1}) / \operatorname{Sin}(x_n);$$

$$x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) / \operatorname{Cos}(x_n);$$

$$x_n = (1 + x_n) / \operatorname{tg}(x_{n-1});$$

$$x_n = nx_{n-1} + \operatorname{tg}(x_{n-1});$$

$$x_n = \operatorname{tg}(x_{n-1}) - 2 / \operatorname{Cos}(x_n).$$

2. Вычислите сумму n -го количества слагаемых $S = \sum_n a_n(x)$ при различных значениях параметра суммирования x , где общий член суммы имеет вид:

$$\frac{n \cdot x^3}{2n!}; \quad (-1)^5 \cdot \frac{n^2 \cdot x^3}{(2n+1)!}; \quad (-1)^7 \frac{\operatorname{Cos} nx}{n^2};$$

$$\frac{x^{2n}}{(2n)!}; \quad \frac{\operatorname{Cos} nx}{n}; \quad \frac{n \cdot x^3}{(n+1)!};$$

$$\frac{\operatorname{Sin}(2n-1)x}{2n-1}; \quad \frac{\operatorname{Cos} 2nx}{4n^2 - 1}; \quad \frac{n^2 + 1}{n!} \cdot \left(\frac{x}{2}\right)^3;$$

$$\frac{n \cdot x^4}{4n+1};$$

3. Вычислите значения функции $F(X)$ на отрезке $[A, B]$ в точках $X_i = A + iH$, где $H = (B - A)/M$, M – заданное целое число, если:

| № | $F(X)$ | A | B | M |
|---|---|---------|----------|----|
| | $x \cdot \operatorname{Sin}(x)$ | 0 | $2/\pi$ | 10 |
| | $\operatorname{Sin}(1/x)$ | $\pi/8$ | $\pi/2$ | 15 |
| | $\operatorname{Cos}(x^2)$ | $\pi/3$ | $3\pi/2$ | 20 |
| | $\operatorname{Tg}(x/2) + \operatorname{Cos}(x)$ | $\pi/2$ | π | 10 |
| | $\operatorname{Ctg}(x/3) + \operatorname{Sin}(x)$ | $\pi/4$ | $\pi/2$ | 15 |
| | $\operatorname{Arcsin}(x)$ | 0 | 1 | 20 |
| | $\operatorname{Sin}(x/4)/2$ | $\pi/2$ | π | 15 |
| | $\operatorname{Sin}(x^2)$ | $\pi/6$ | $2\pi/3$ | 10 |
| | $\operatorname{Cos}(1/x)$ | $\pi/4$ | $4/\pi$ | 20 |
| | $\operatorname{Arctg}(x)$ | 2 | 7 | 15 |

4. Дан двумерный массив $A(m, n)$. Постройте и выведите на экран одномерный массив $B(n)$ элементы которого равны:

сумме элементов в строках с нечетными номерами;

$$b_i = \max\{a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}\}, \quad i = 1, 2, \dots, m;$$

сумме элементов в столбцах с четными номерами;

$$b_i = \prod_{j=1} a_{i,j} \text{ для всех таких } j, \text{ что } 1 < a_{i,j} < n.$$

разности элементов в строках с нечетными номерами;

$$b_i = \sum_{l=1}^m \left| a_{i,j} \right|.$$

разности элементов в столбцах с четными номерами;

произведению элементов в столбцах с четными номерами;

$$b_i = \prod_{j=1}^m a_{j,i}.$$

$$b_i = \min \{a_{1i}, a_{2i}, \dots, a_{mi}\}, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

5. Вычислите значение выражения:

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{i-j+1}{i+j}, \text{ если } n=100, m=80;$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m n \cdot \sin(i^3 + j^4), \text{ если } n=60, m=20;$$

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{23 \cdot i + j^4}{m \cdot i}, \text{ если } n=50, m=25;$$

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \left(\frac{i+j}{5 \cdot j + i^3} \right) \cdot n, \text{ если } n=25, m=15;$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m i^3 \cdot j^4}{n \cdot m}, \text{ если } n=100, m=100;$$

$$\sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{(i-j)^3}{m-n}, \text{ если } n=50, m=55;$$

$$\prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m \frac{i^2 + j^3}{i^3 + j^4}, \text{ если } n=50, m=51;$$

$$\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{|i-j|}{|(i+j)^2|}, \text{ если } n=70, m=35.$$

$$\frac{n^2 + m^2}{\prod_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sqrt{i+j}}, \text{ если } n=70, m=35;$$

$$\frac{\sum_{i=1}^n |i| \cdot n}{\sum_{j=1}^m |j| \cdot m}, \text{ если } n=100, m=100;$$

Практическое занятие №17. Машина Тьюринга.

Машина Тьюринга состоит из бесконечной в обе стороны ленты, разбитой на ячейки, и рабочей головки. Она работает в дискретные моменты времени: $t_0, t_1, \dots, t_n, \dots$. В каждый момент во всякой ячейке ленты может быть записана одна из букв некоторого конечного внешнего алфавита $A = \{a_0, a_1, \dots, a_{k-1}\}$, а головка может находиться в одном из конечного числа внутренних состояний $Q = \{q_0, q_1, \dots, q_{r-1}\}$ - внутренний алфавит. Символ a_0 является "пустым" (будем обозначать его Λ) и что все клетки ленты заполнены этим символом.

В каждый момент времени рабочая головка обзревает одну ячейку ленты и выполняет следующие действия:

- 1) *заменяет символ в обозреваемой ячейке новым (возможно, прежним);*
- 2) *переходит в новое состояние (возможно, в прежнее);*
- 3) *сдвигается на одну ячейку (вправо **R** или влево **L**) либо остается на месте **H**.*

Работа машины задается системой команд вида: $q; a_j \rightarrow q_1 a_p D$, где $D \in \{R, L, H\}$.

Совокупность команд будем называть программой машины Тьюринга.

Среди состояний машины (головки) выделено одно, называемое заключительным (впредь мы будем считать, что это состояние q_0).

Под *конфигурацией машины Тьюринга* мы понимаем распределение букв алфавита A по ячейкам ленты, состояние головки и обозреваемую ячейку. Работа машины Тьюринга по программе состоит в смене конфигураций. Конфигурацию в момент времени t_i будем обозначать Kt_i . Если эта конфигурация не является заключительной, то машина в соответствии со следующей командой переходит в конфигурацию Kt_{i+1} .

Если нужно решить некоторую задачу на машине Тьюринга, исходным данным задачи сопоставляется начальная конфигурация Kt_0 , а ответ задачи определяется заключительной конфигурацией, в которую программа машины переводит конфигурацию Kt_0 .

Примеры выполнения заданий

1. Пусть требуется добавить 1 к натуральному числу n , представленному на ленте машины Тьюринга в двоичной системе счисления, то есть в алфавите $\{0,1\}$.

Решение: внешний алфавит машины будет следующим: $\{\Lambda, 0, 1\}$.

Будем считать начальной следующую конфигурацию: $\Lambda q_1 \sigma_1 \dots \sigma_p \Lambda$. Для того, чтобы прибавить 1 к двоичному числу n сначала необходимо "отогнуть" головку машины вправо и установить ее под последней (самой младшей) цифрой двоичного числа. Если последняя цифра числа есть 0, то достаточно заменить 0 на 1 и завершить процесс, то есть перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 .

Если же последняя цифра числа есть 1, то необходимо заменить ее на 0, а головку сдвинуть влево, чтобы "увидеть" следующий разряд двоичного числа. Если окажется, что этот разряд содержит 0, то заменить 0 на 1 и опять-таки перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 . Если же этот разряд содержит 1, необходимо заменить ее на 0 и опять сдвинуть головку влево. И так далее, до тех пор, пока либо не встретится разряд, содержащий 0, либо головка дойдет до первого слева пустого символа Λ . В любом из этих случаев 0 или Λ следует заменить на 1 и перевести головку (машину) в заключительное состояние q_0 .

Программа машины, прибавляющей 1 к двоичному числу, имеет вид:

$$q_1 1 \rightarrow q_1 1 R$$

$$q_2 \Lambda \rightarrow q_0 1 H$$

$$\begin{array}{ll}
 q_1 0 \rightarrow q_1 0R & q_3 1 \rightarrow q_3 1L \\
 q_1 \Lambda \rightarrow q_2 \Lambda L & q_3 0 \rightarrow q_3 0L \\
 q_2 0 \rightarrow q_3 1H & q_3 \Lambda \rightarrow q_0 \Lambda R. \\
 q_2 1 \rightarrow q_2 0L &
 \end{array}$$

2. Пусть требуется перевести запись натурального числа n , изображенного в виде последовательности n "палочек" ($|$) $n \geq 1$, в двоичную запись в алфавите $\{0,1\}$. Т.е. конфигурация $\Lambda q_1|/|...|\Lambda$ должна быть преобразована в $\Lambda q_0 \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p \Lambda$, где $\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_p$ - двоичная запись n .

Решение: в качестве внешнего алфавита машины берем алфавит: $\{\Lambda, |, 0, 1\}$.

Опишем алгоритм решения задачи в словесной форме:

1. "Отогнуть" головку машины влево до первого пустого символа, заменить этот символ нулем (0).
2. "Отогнуть" головку машины вправо до последней черточки, заменить ее пустым символом. Запомнить, что 1 из унарного представления числа n вычтена.
3. Установить головку под младшим разрядом формируемого двоичного числа и прибавить к двоичному числу 1 (так как мы делали это при построении предыдущей машины). Запомнить, что 1 к двоичному числу прибавлена.
4. Пункты 2 и 3 повторять до тех пор, пока не исчерпается исходное число, то есть на ленте не останется "палочек".
5. Головку отогнуть в крайнюю левую позицию полученного двоичного числа и остановить машину.

Программа работы машины имеет вид:

$$\begin{array}{ll}
 q_1 | \rightarrow q_1 |L & q_4 \Lambda \rightarrow q_5 1R \\
 q_1 \Lambda \rightarrow q_2 0R & q_5 1 \rightarrow q_5 1R \\
 q_2 | \rightarrow q_2 |R & q_5 0 \rightarrow q_5 0R \\
 q_2 \Lambda \rightarrow q_3 \Lambda L & q_5 | \rightarrow q_2 |H \\
 q_3 | \rightarrow q_4 \Lambda L & q_5 \Lambda \rightarrow q_6 \\
 q_4 | \rightarrow q_4 |L & \Lambda L \\
 q_4 0 \rightarrow q_5 1R & q_6 1 \rightarrow q_6 1L \\
 q_4 1 \rightarrow q_4 0L & q_6 0 \rightarrow q_6 0L \\
 & q_6 \Lambda \rightarrow q_0 \Lambda R
 \end{array}$$

3. Составьте программу машины Тьюринга, подсчитывающую число вхождений символа a в слово P в алфавите $\{a, b, c\}$.

Решение: пусть начальная конфигурация машины имеет вид q_1P .

Надо перевести ее в конфигурацию q_0n^*P , где n – двоичное число, выражающее число вхождений символа a в слово P в алфавите $\{a, b, c\}$.

Внешний алфавит машины: $A = \{a, b, c, a', 0, 1, *, \Lambda\}$.

Внутренний алфавит машины: $Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6, q_7\}$.

Опишем алгоритм решения задачи в словесной форме:

1. Слева от слова P приписываем символы 0 и $*$.
2. Находим в слове P вхождение символа a , заменяем его на a' , запоминая, перемещаем головку влево, прибавляем 1 к двоичному числу n («счетчику»).
3. Повторяем п. 2 до тех пор, пока не пройдем все слово P .
4. Убираем все штрихи в слове P .
5. Устанавливаем головку машины под крайней левой цифрой двоичного числа n и останавливаем машину.

Программа работы машины имеет вид:

| | | | |
|---------------------------------|----------------------------|---------------------------------------|---------------------------------------|
| $q_1a \rightarrow q_2aL$ | $q_4* \rightarrow q_5^*R$ | $q_6a' \rightarrow q_6a'L$ | $q_7b \rightarrow q_7bL$ |
| $q_1b \rightarrow q_2bL$ | $q_5b \rightarrow q_5bR$ | $q_6^* \rightarrow q_6^*L$ | $q_7c \rightarrow q_7cL$ |
| $q_1c \rightarrow q_2cL$ | $q_5c \rightarrow q_5cR$ | $q_60 \rightarrow q_41R$ | $q_7a' \rightarrow q_7aL$ |
| $q_2\Lambda \rightarrow q_3^*L$ | $q_5a' \rightarrow q_5a'R$ | $q_61 \rightarrow q_60L$ | $q_7^* \rightarrow q_7^*L$ |
| $q_3\Lambda \rightarrow q_40R$ | $q_5a \rightarrow q_6a^H$ | $q_6\Lambda \rightarrow q_41L$ | $q_70 \rightarrow q_70L$ |
| $q_40 \rightarrow q_40R$ | $q_6b \rightarrow q_6bL$ | $q_5\Lambda \rightarrow q_7\Lambda L$ | $q_71 \rightarrow q_71L$ |
| $q_41 \rightarrow q_41R$ | $q_6c \rightarrow q_6cL$ | $q_7a \rightarrow q_7aL$ | $q_7\Lambda \rightarrow q_0\Lambda R$ |

Задания для самостоятельного выполнения

1. Постройте машину Тьюринга,

0) *прибавляющую 1 к натуральному числу n , представленному в троичной системе счисления. Начальная конфигурация:*

$q_1\beta_1\beta_2\dots\beta_n$, где β_i – троичные цифры 0, 1 или 2;

1) *складывающую натуральные числа m и n в троичной системе счисления. Начальная конфигурация:*

$q1\beta11\beta12\dots\beta1s+\beta21\beta22\dots\beta2p$, заключительная конфигурация:
 $q0\beta31\beta32\dots\beta3q$, где $\beta1i, \beta2j, \beta3k$ – троичные цифры 0, 1 или 2;

2) прибавляющую 1 к натуральному числу n , представленному в шестеричной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\delta1\delta2\dots\delta s$, где δi – шестеричные цифры 0, 1, ..., 5. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы);

3) вычитающую 1 из натурального числа $n > 1$, представленного в десятичной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\delta1\delta2\dots\delta s$, где δi – десятичные цифры 0, 1, ..., 9. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы);

4) складывающую натуральные числа m и n в десятичной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\delta11\delta12\dots\delta1s+\delta21\delta22\dots\delta2p$, заключительная конфигурация:

$q0\delta31\delta32\dots\delta3q$, где $\delta1i, \delta2j, \delta3k$ – десятичные цифры 0, 1, ..., 9. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы);

5) вычитающую 1 из натурального числа $n > 1$, представленного в троичной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\beta1\beta2\dots\beta n$, где βi – троичные цифры 0, 1 или 2;

6) прибавляющую 1 к натуральному числу n , представленному в десятичной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\delta1\delta2\dots\delta s$, где δi – десятичные цифры 0, 1, ..., 9. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы);

7) складывающую натуральные числа m и n в четвертичной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\beta11\beta12\dots\beta1s+\beta21\beta22\dots\beta2p$, заключительная конфигурация:

$q0\beta31\beta32\dots\beta3q$, где $\beta1i, \beta2j, \beta3k$ – четвертичные цифры 0, 1, 2 или 3;

8) вычитающую 1 из натурального числа $n > 1$, представленного в пятеричной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\beta1\beta2\dots\beta n$, где βi – пятеричные цифры 0, 1, 2, 3 или 4;

9) прибавляющую 1 к натуральному числу n , представленному в восьмеричной системе счисления. Начальная конфигурация:

$q1\delta1\delta2\dots\delta s$, где δi – восьмеричные цифры 0, 1, ..., 7. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы).

2. Постройте машину Тьюринга, подсчитывающую

0) число единиц в двоичном коде $\alpha1\alpha2\dots\alpha n$ и записывающую результат подсчета слева от заданного кода в троичной системе

счисления. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; β_i – троичные цифры 0, 1 или 2;

1) число вхождений символа a в слово P в алфавите $\{a, b, c, d\}$ и записывающую результат в троичной системе счисления слева от слова P . Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$. Заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i \in \{a, b, c, d\}$; β_i – троичная цифра 0, 1 или 2;

2) число единиц в слове P в двоичном алфавите $\{0, 1\}$ и записывающую это число в десятичной системе счисления слева от слова P . Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i \in \{0, 1\}$; $\beta_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$;

3) число единиц в слове P в двоичном алфавите $\{0, 1\}$ и записывающую это число в восьмеричной системе счисления слева от слова P . Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i \in \{0, 1\}$; $\beta_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

4) число вхождений строки 101 в двоичное слово P и записывающую результат слева от слова P в троичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\psi_1\psi_2\dots\psi_n * \beta_1\beta_2\dots\beta_m$, где $\psi_i \in \{0, 1\}$; $\beta_i \in \{0, 1, 2, 3\}$;

5) число вхождений строки aba в слово P в алфавите $\{a, b\}$ и записывающую результат слева от слова P в двоичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i \in \{a, b\}$; $\beta_i \in \{0, 1\}$;

6) сумму цифр троичного числа и записывающую результат слева от заданного троичного числа в двоичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i \in \{0, 1, 2\}$; $\beta_i \in \{0, 1\}$;

7) сумму цифр десятичного числа и записывающую результат слева от заданного десятичного числа в десятичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_1\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * \psi_1\psi_2\dots\psi_n$, где $\psi_i, \beta_i \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$. (Для сокращения записи программы используйте метасимволы.);

8) число нулей в двоичном коде $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$ и записывающую результат подсчета слева от заданного кода в троичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m * q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; β_i – троичные цифры 0, 1 или 2;

9) число вхождений строки 100 в двоичное слово Р и записывающую результат слева от слова Р в троичной системе счисления. Начальная конфигурация: $q_0\psi_1\psi_2\dots\psi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\psi_1\psi_2\dots\psi_n * \beta_1\beta_2\dots\beta_m$, где $\psi_i \in \{0, 1\}$; $\beta_i \in \{0, 1, 2, 3\}$.

3. Постройте машину Тьюринга, осуществляющую перевод натурального числа n

а) из двоичной системы в троичную. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, заключительная конфигурация: $q_0\beta_1\beta_2\dots\beta_m$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; β_i – троичные цифры 0, 1 или 2;

а) из двоичной системы в десятичную. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$, заключительная конфигурация: $q_0\delta_1\delta_2\dots\delta_n$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; δ_i – десятичные цифры 0, 1, ..., 9;

б) из восьмеричной системы счисления в двоичную с использованием метода триад. Начальная конфигурация: $q_1\chi_1\chi_2\dots\chi_n$, заключительная конфигурация: $q_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; χ_i – восьмеричные цифры 0, 1, ..., 7;

с) из троичной системы в двоичную. Начальная конфигурация: $q_1\beta_1\beta_2\dots\beta_m$, заключительная конфигурация: $q_0\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; β_i – троичные цифры 0, 1 или 2;

д) из двоичной системы счисления в восьмеричную с использованием метода тетрад. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_m$, заключительная конфигурация: $q_0\chi_1\chi_2\dots\chi_n$, где α_i – двоичные цифры 0, 1; χ_i – восьмеричные цифры 0, 1, ..., 7;

4. Постройте машину Тьюринга,

0) находящую и выделяющую (например, «*») первое вхождение слова \log в произвольное слово Р в алфавите $\{1, o, g\}$ или сообщающую о том, что такого вхождения нет;

1) переводящую слово F в алфавите $\{a, b, c\}$ в его «зеркальное отражение» $F\sim$. Начальная конфигурация: q_1F , заключительная конфигурация: $q_0F\sim$. (Например, слово $abbca$ эта машина должна переводить в слово $acbbba$, слово $baba$ - в слово $abab$ и т.д.);

- 2) находящую и выделяющую (например, «?») первое вхождение слова *dec* в произвольное слово *G* в алфавите {d, e, c} или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 3) строящую инверсию двоичного кода $\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$. Начальная конфигурация: $q_1\alpha_1\alpha_2\dots\alpha_n$, заключительная конфигурация: $q_0\alpha'_1\alpha'_2\dots\alpha'_n$, где $\alpha'_i=1$, если $\alpha_i=0$ и $\alpha'_i=0$, если $\alpha_i=1$;
- 4) находящую и выделяющую (например, «%») первое вхождение слова *int* в произвольное слово *W* в алфавите {i, n, t} или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 5) проверяющую справедливость неравенства $n > m$, где *n* и *m* - двоичные числа. В зависимости от справедливости неравенства, машина слева от него пишет на ленте "ДА" или "НЕТ". Начальная конфигурация: $q_1\beta_1\beta_2\dots\beta_s > \psi_1\psi_2\dots\psi_t$, заключительная: $q_0P\beta_1\beta_2\dots\beta_s > \psi_1\psi^2\dots\psi_t$, где $\psi_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $P \in \{\text{ДА}, \text{НЕТ}\}$;
- 6) находящую и выделяющую (например, «#») первое вхождение слова *abs* в произвольное слово *V* в алфавите {a, b, s} или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 7) проверяющую справедливость неравенства $n < m$, где *n* и *m* - двоичные числа. В зависимости от справедливости неравенства, машина слева от него пишет на ленте "ДА" или "НЕТ". Начальная конфигурация: $q_1\beta_1\beta_2\dots\beta_s < \psi_1\psi_2\dots\psi_t$, заключительная: $q_0P\beta_1\beta_2\dots\beta_s < \psi_1\psi^2\dots\psi_t$, где $\psi_i, \beta_i \in \{0,1\}$, $P \in \{\text{ДА}, \text{НЕТ}\}$;
- 8) находящую и выделяющую (например, «\$») первое вхождение слова *sqg* в произвольное слово *Q* в алфавите {s, q, g} или сообщающую о том, что такого вхождения нет;
- 9) переводящую слово *H* в алфавите {e, x, p} в его «зеркальное отражение» *H~*. Начальная конфигурация: q_1H , заключительная конфигурация: $q_0H\sim$. (Например, слово *eexxr* эта машина должна переводить в слово *pxxee*).

Рекомендуемая литература

1. Ершов Д.Л., Палютин Е.А. "Математическая логика", М, Наука, 1987г.
2. Карпов В.Г., Мощенский В.А. Математическая логика и дискретная математика. – Минск: «Вышэйш. школа», 1977
3. Клини С. Математическая логика. - М.: Мир, 1980.
4. Колесников Н.Г. Математические и логические основы информатики. Краснодар: КубГАУ, 2000
5. Колмогоров А.Н. Математика / В кн. Колмогоров А.Н. Математика в её историческом развитии. - М.: Наука, 1991. - С.
6. Колмогоров А.Н., Драгалин А.Г. Введение в математическую логику. - М.: Изд-во МГУ, 1982.
7. Кук Д., Бейз Г. "Компьютерная математика", М, Наука, 1990г.
8. Куратовский К., Мостовский А. Теория множеств. М., 1970
9. Лихтарников Л.М, Сукачева Т.Г. Математическая логика. - СПб: Изд-во «Лань», 1998
10. Столяр А.А. Элементарное введение в математическую логику - М.: Изд-во «Просвещение», 1965